

ББК 22.21  
Н74  
УДК 531

Рецензенты: кафедра теоретической механики Киевского политехнического института (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. М. А. Павловский); д-р физ.-мат. наук, проф. Н. А. Парусников.

**Новожилов И. В., Зацепин М. Ф.**  
Н74 Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ:  
Учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 136 с.: ил.

В пособии содержатся задания по трем основным частям курса (статике, кинематике и динамике), что составляет единый организационный и методический комплекс — типовой расчет по теоретической механике. Выполнение каждого из заданий предусматривает составление уравнений механики, программирование для счета на ЭВМ, счет, оформление задания и его защиту.

Н 1703020000—568 128 — 87  
001(01)—86

ББК 22.21  
531

*Учебное издание*

**Игорь Васильевич Новожилов,  
Михаил Федосеевич Зацепин**

## **ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ НА БАЗЕ ЭВМ**

Зав. редакцией *В. И. Трефилов*  
Редактор *О. Г. Подобедова*  
Мл. редактор *Т. Ф. Артюхина*  
Художник *В. В. Корнеев*  
Художественный редактор *Л. К. Громова*  
Технический редактор *Ю. А. Хорева*  
Корректор *Г. И. Кострикова*

ИБ № 6616

Изд. № ОТ-558. Сдано в набор 31.07.86. Подп. в печать 18.11.86.  
Формат 60×88<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. офсетная. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.  
Объем 8,33 усл. печ. л. 8,58 усл. кр.-отт. 8,06 уч.-изд. л.  
Тираж 40 000 экз. Зак. № 494. Цена 25 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная наука и производство предъявляют все возрастающие требования к культуре модельного математического мышления выпускников высшей школы.

На острую актуальность задач повышения уровня фундаментальной и вычислительной подготовки специалистов указывается в постановлениях ЦК КПСС, Советского правительства, приказах Министерства высшего и среднего специального образования СССР.

В Политическом докладе ЦК КПСС XXVII съезду КПСС перед высшей школой ставится задача обеспечить подготовку специалистов, обладающих основательными теоретическими знаниями и практическими навыками, обеспечить компьютерную грамотность.

Среди дисциплин высшей школы теоретическая механика играет особую роль в воспитании модельно-математической культуры студентов. Следуя непосредственно за общим курсом высшей математики, теоретическая механика является первым «потребителем» ее алгоритмов, первой из дисциплин, где студенты встречаются с замкнутыми системами уравнений механических систем — математическими моделями объектов реального мира.

Необходимость в сжатое время, отводимое учебными планами на изучение теоретической механики (особенно для немеханических специальностей), обучить студента умению оперировать с основными механическими понятиями неизбежно приводит к упрощенным постановкам решаемых ими задач (углы считаются равными  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ , ..., силы — постоянными, дифференциальные уравнения динамики фактически трактуются как линейные алгебраические уравнения). Такие упрощенные, наглядные постановки, являясь необходимым начальным этапом обучения студентов, не оставляют места для развитых аналитических методик составления уравнений механики, для применения алгоритмов высшей математики, для применения ЭВМ.

Типовые расчеты, выполняемые с помощью ЭВМ, открывают в этих условиях весьма действенные дополнительные возможности обогащения и алгоритмизации курса теоретической механики.

При разработке заданий были приняты следующие посылки: 1. Типовой расчет должен обучить студента умению оперировать с механическими величинами и составлять основные типы уравнений статики, кинематики, динамики. Сложность задач должна оправдывать последующее использование ЭВМ. Аналитическая, формализованная часть расчета должна дополняться наглядными,

прикидочными расчетами вручную типа контроля результатов счета, оценки интервала интегрирования и т. п. 2. При выполнении расчета студент должен использовать основные алгоритмы общего курса высшей математики: векторные и матричные преобразования, дифференцирование и интегрирование, постановку задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование этих уравнений. 3. При выполнении типового расчета по теоретической механике студент, как правило, впервые встречается с ЭВМ. Расчет должен дать ему начальные навыки общения с машиной: умение выдать задание на перфорацию, сформировать пакет перфокарт, расшифровать распечатку, умение работать за дисплеем в диалоговом режиме.

Задания типового расчета, представленные в настоящем сборнике, сформировались в ходе более чем десятилетнего их применения для всего контингента студентов Московского энергетического института.

Студент выполняет комплект из нескольких заданий, который формируется кафедрой в зависимости от объема и содержания курса для студентов разных специальностей.

Авторы благодарны рецензентам проф. М. А. Павловскому и проф. Н. А. Парусникову за ценные замечания по материалу книги.

Книга обязана своим появлением инициативе проф. А. А. Яблонского. Авторы благодарны ему за неизменную благожелательность и внимание к их работе.

Отзывы и пожелания читателей просим направлять в адрес издательства «Высшая школа»: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

*Авторы*

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$t$  — время;

$x, y, z$  — координаты точек;

$\vec{v}_A, \vec{w}_A$  — векторы скорости и ускорения точки, указанной в индексе;

$m_i, G_i$  — масса и вес тел;

$R_i, r_i, a, b, c, l$  — линейные размеры звеньев, радиусы колес, дисков;

$I_i$  — осевые моменты инерции;  $\rho_i$  — радиусы инерции тел;

$\varphi_i$  — углы поворота звеньев;

$\omega_i, \varepsilon_i$  — векторы угловой скорости и углового ускорения. Индекс  $i$  соответствует номеру тела, обозначенному на рисунке;

$\vec{F}, \vec{F}_d, \vec{F}_n, \vec{F}_c$  — векторы сил (индексы «д», «н», «с» означают «движущая», «нагрузки», «сопротивления»);

$\vec{M}, \vec{M}_d, \vec{M}_n, \vec{M}_c$  — векторы моментов сил;

$S_i$  — усилия в стержнях, натяжения нитей (тросов, ремней);

$N_A$  — нормальная реакция опоры  $A$ ; через  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$  обозначены составляющие реакции шарнира  $A$ ;

$T, A, N$  — соответственно кинетическая энергия, работа, мощность;

$\tau$  — интервал интегрирования.

При задании числовых значений параметров индекс «1» означает, что исходное значение данной величины берется из таблицы и преобразуется по указанным формулам. В них через  $N$  обозначен номер студенческой группы, через  $n$  — номер факультета. Единицы величин заданы в СИ. Ряд обозначений поясняется на рисунках.

## СТАТИКА

### Определение реакций связей составной конструкции

#### РАСЧЕТ С-1

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта решения задач статики: составление уравнений равновесия и их решение на ЭВМ.

Рассматривается плоская механическая конструкция, находящаяся в равновесии под действием заданных сил и наложенных связей (рис. 1—3). Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими. Стержни, изображенные сплошными линиями, невесомые. Трение в шарнирах, катках и точках контакта тел отсутствует.

Числовые значения величин задаются формулами (1) и табл. 1:

$$F = F_T + 0,1n, \quad G_1 = G_{1T} + 0,1N; \quad G_2 = G_{2T} + 0,1N;$$

$$\sin \alpha_1 = (\sin \alpha_1)_T + 10^{-3}n; \quad \sin \alpha_j = (\sin \alpha_j)_T + 10^{-3}N \quad (j=2, 3, 4). \quad (1)$$

Силы в табл. 1 заданы в килоньютонах.

Требуется определить реакции шарнира  $O$  и катковой опоры  $K$ , усилия в невесомых стержнях, давление в точке  $D$ .

**Указания к составлению уравнений равновесия.** Тела, входящие в систему, освобождаются от связей. Действие связей заменяется их реакциями. Для определенности принимается, что усилия в стержне растягивающие. Уравнения равновесия записываются для весомых тел. Во всех вариантах система уравнений равновесия состоит из шести уравнений относительно шести неизвестных.

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Полученная система линейных алгебраических неоднородных уравнений приводится к стандартной матричной форме

$$AX = B, \quad (2)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов;  $X$ ,  $B$  — матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов. Элементы матрицы  $A$  и столбца  $B$  вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

Система (2) решается с помощью ЭВМ путем обращения к стандартной подпрограмме. Один из возможных вариантов программы для ЕС ЭВМ с обращением к подпрограмме SIMQ [14] приведен в рассмотренном ниже примере.

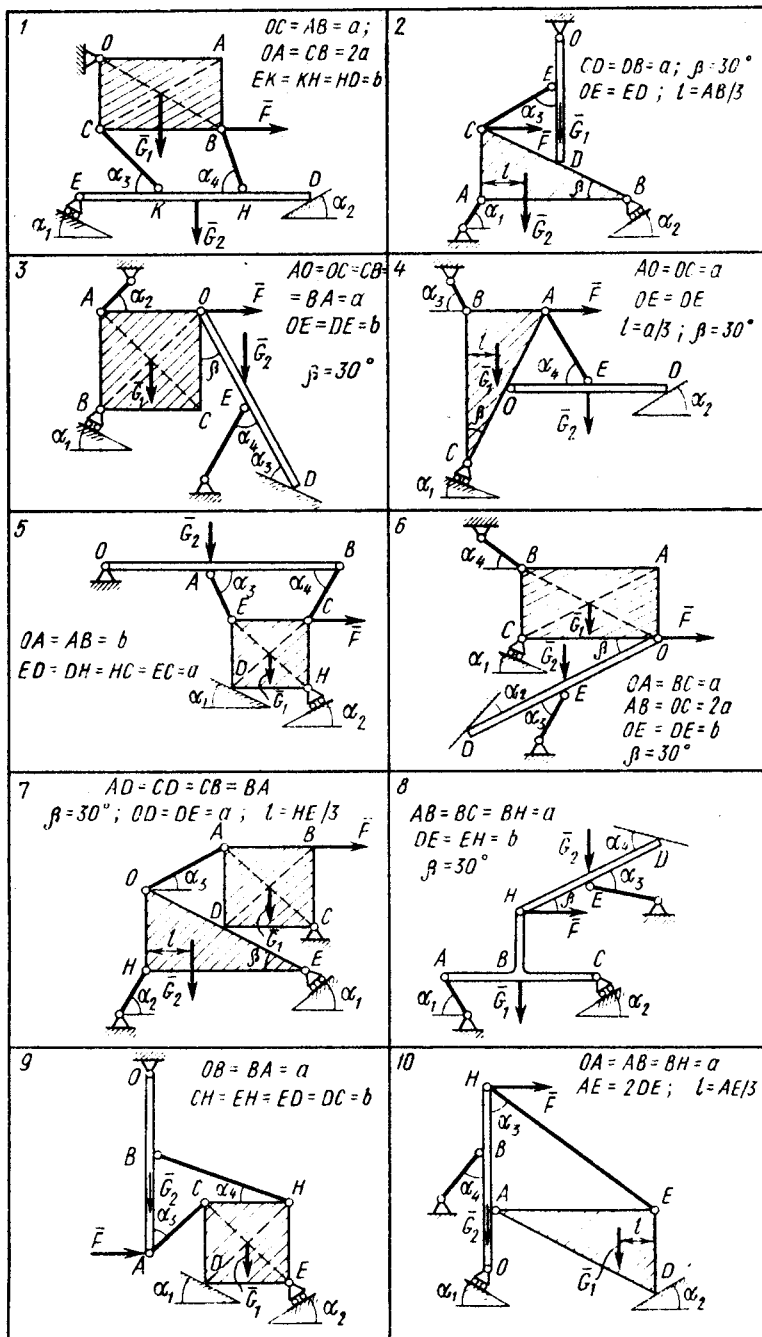


Рис. 1

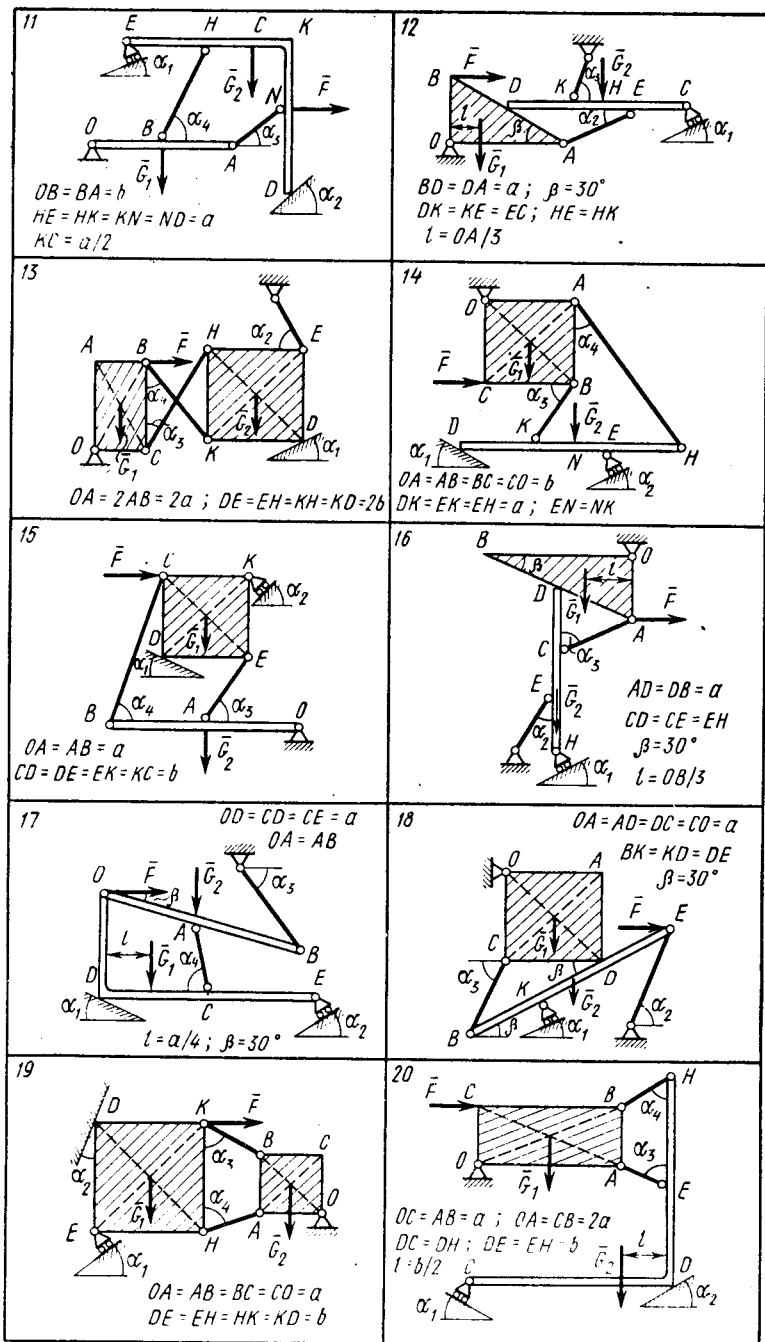


Рис. 2

С целью упрощения отладки программы и ее индивидуализации элементы матрицы системы и столбца свободных членов вводятся с помощью оператора DATA.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, исходные данные вводить оператором READ, организовать печать обоз-

Таблица 1

Вариант	$F_T$	$G_{1T}$	$G_{2T}$	$(\sin \alpha_1)_T$	$(\sin \alpha_2)_T$	$(\sin \alpha_3)_T$	$(\sin \alpha_4)_T$
1	10	10	10	0,20	0,13	0,68	0,88
2	10	20	10	0,82	0,15	0,77	—
3	30	10	20	0,30	0,64	0,54	0,70
4	10	10	10	0,26	0,22	0,70	0,90
5	5	40	40	0,30	0,30	0,85	0,90
6	5	40	10	0,24	0,30	0,50	0,64
7	20	20	10	0,30	0,90	0,47	—
8	40	10	10	0,70	0,26	0,53	0,57
9	5	50	10	0,17	0,22	0,64	0,34
10	10	10	10	0,47	0,30	0,70	0,50
11	7	10	10	0,22	0,10	0,34	0,90
12	10	10	30	0,30	0,42	0,50	—
13	15	10	10	0,34	0,64	0,34	0,47
14	20	10	20	0,42	0,22	0,77	0,62
15	20	10	10	0,20	0,70	0,77	0,94
16	10	10	10	0,34	0,50	0,90	—
17	10	20	10	0,25	0,34	0,88	0,94
18	10	30	10	0,20	0,94	0,80	—
19	10	20	10	0,25	0,25	0,77	0,94
20	10	10	20	0,40	0,30	0,94	0,90
21	10	10	20	0,60	0,85	0,90	—
22	15	20	20	0,30	0,24	0,93	0,77
23	10	20	10	0,20	0,90	0,77	0,26
24	10	30	10	0,30	0,34	0,64	0,85
25	10	20	10	0,35	0,40	0,60	0,94
26	5	40	20	0,34	0,90	0,70	—
27	10	10	10	0,30	0,30	0,90	0,85
28	10	20	10	0,34	0,40	0,50	—
29	10	20	10	0,35	0,30	0,60	0,70
30	10	10	20	0,40	0,30	0,30	0,90

начений реакций, реализовать в программе один из методов числового решения системы линейных алгебраических уравнений [8] и т. д.

**Контроль решения.** Для проверки правильности решения задачи следует составить уравнение, не совпадающее ни с одним из уравнений (2). Подстановка решения системы (2) в это уравнение должной обращать его в тождество. За счет погрешностей счета и погрешностей округления даже в правильно решенной задаче левая часть контрольного уравнения после подстановки не обраща-



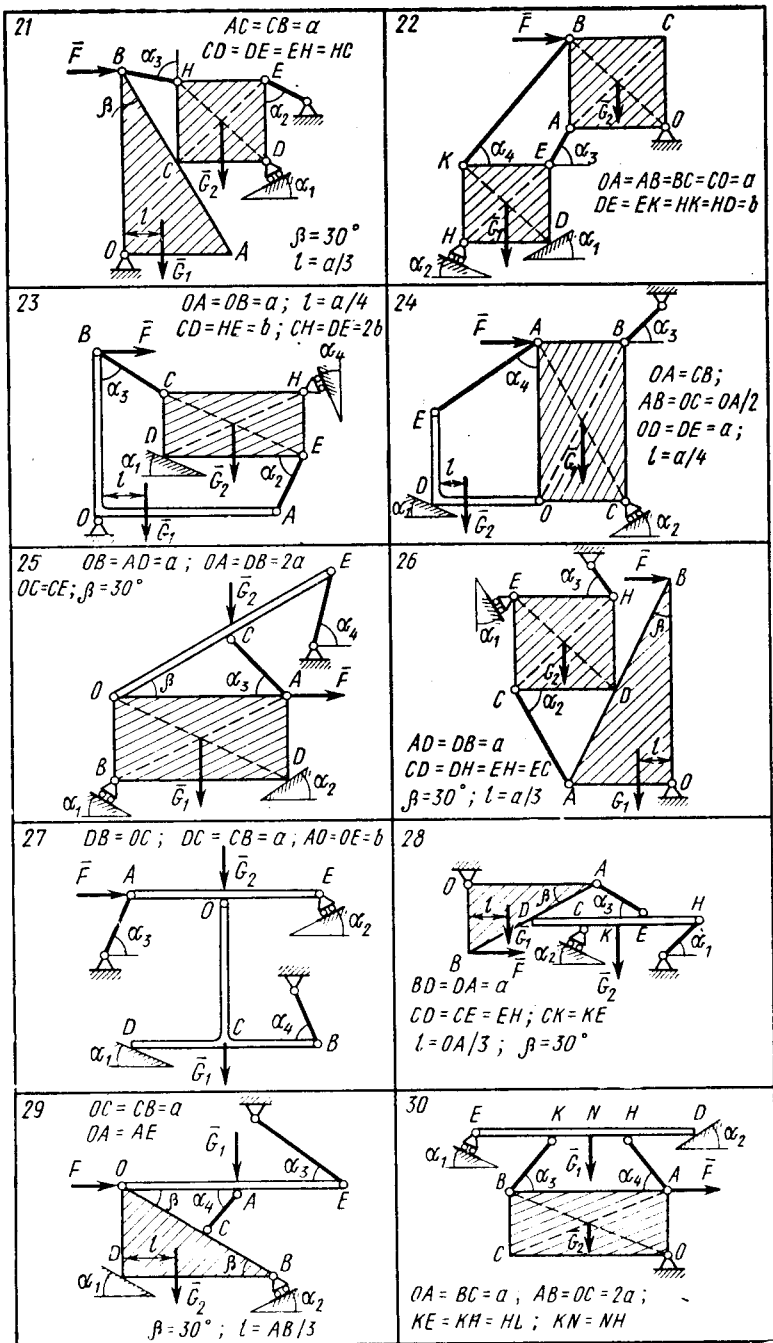


Рис. 3

ется в ноль и даст «невязку»  $\Delta$ . Условимся считать точность решения удовлетворительной, если относительная «невязка»

$$\delta = |\Delta| / \max |X_i| \cdot 100\% \leq 3\%.$$

Здесь  $\max |X_i|$  — максимальное по модулю из решений системы (2).

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Составить уравнения равновесия для одного из тел системы, к которому дополнительно приложена произвольно направленная активная сила, пара сил или равномерно распределенная нагрузка.

2. Составить уравнение моментов для одного из тел, изменив центр приведения.

3. Как изменится система уравнений равновесия, если к одному из невесомых стержней дополнительно приложить активную силу, пару сил или распределенную нагрузку?

4. Останется ли система статически определимой, если катковую опору заменить шарниром? Составить для этого случая систему уравнений равновесия.

5. Объяснить смысл отрицательных значений найденных реакций.

6. Объяснить операторы программы.

7. Как изменится программа, если контрольную «невязку» вычислять на ЭВМ?

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ ).

**Постановка задачи.** В конструкции (рис. 4) вес прямоугольной пластины равен  $G_1$ , вес треугольной —  $G_2$ . В точке  $E$  приложена сила  $F$ . Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими,

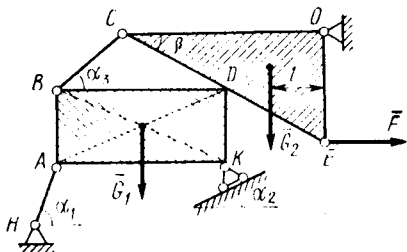


Рис. 4

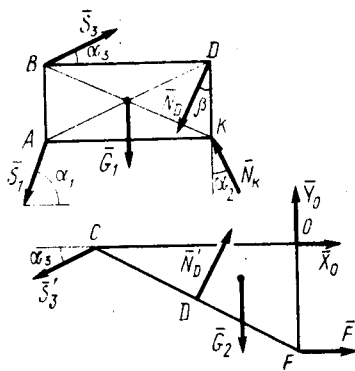


Рис. 5

стержни  $АН$  и  $СВ$  — невесомыми. Трение в шарнирах, катковой опоре  $K$  и опоре  $D$  отсутствует.

Дано:  $G_1=20,7$  кН,  $G_2=10,7$  кН,  $F=10,3$  кН,  $\sin \alpha_1=0,753$ ,

$\sin \alpha_2 = 0,357$ ,  $\sin \alpha_3 = 0,607$ ,  $\beta = 30^\circ$ ;  $AB = DK = a$ ,  $DB = AK = 2a$ ,  
 $CD = DE = b$ ,  $l = OC/3$ .

Требуется определить реакции шарнира  $O$  и катковой опоры  $K$ ,  
 усилия в стержнях  $AH$  и  $CB$ , давление в точке  $D$ .

**Составление уравнений равновесия.** Освободим систему от свя-  
 зей и обозначим реакции, как показано на рис. 5. Рассмотрим рав-  
 новесие каждого тела. На прямоугольную пластину действуют си-  
 ла  $\bar{G}_1$  и реакции связей  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{N}_D$ ,  $\bar{S}_3$ ,  $\bar{N}_K$ . Уравнения равновесия ука-  
 занных сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -S_1 \cos \alpha_1 - N_K \sin \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 - N_D \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -S_1 \sin \alpha_1 + N_K \cos \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 - N_D \cos \beta - G_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\bar{F}_k) = N_K \cos \alpha_2 \cdot 2a - S_3 \cos \alpha_3 \cdot a -$$

$$- N_D (\cos \beta \cdot 2a - \sin \beta \cdot a) - G_1 a = 0. \quad (3)$$

Для сил  $\bar{X}_O$ ,  $\bar{Y}_O$ ,  $\bar{S}_3' = -\bar{S}_3$ ,  $\bar{N}_D' = -\bar{N}_D$ ,  $\bar{G}_2$ , приложенных к тре-  
 угольной пластине, уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_O - S_3 \cos \alpha_3 + N_D \sin \beta + F = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_O - S_3 \sin \alpha_3 + N_D \cos \beta - G_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Cz}(\bar{F}_k) = 2Y_O \cos \beta \cdot b + N_D b + Fb - G \frac{4}{3} b \cos \beta = 0. \quad (4)$$

Подставим в уравнения (3), (4) числовые значения коэффици-  
 ентов, вычисленных с тремя значащими цифрами. Тогда

$$-0,658S_1 - 0,357N_K + 0,795S_3 - 0,5N_D = 0;$$

$$-0,753S_1 - 0,934N_K + 0,607S_3 - 0,867N_D - 20,7 = 0;$$

$$1,87N_K - 0,755S_3 - 1,23N_D - 20,7 = 0;$$

$$X_O - 0,795S_3 + 0,5N_D + 10,3 = 0;$$

$$Y_O - 0,607S_3 + 0,867N_D - 10,7 = 0;$$

$$1,73Y_O + N_D - 2,1 = 0. \quad (5)$$

**Решение задачи на ЭВМ.** Приведем систему (5) к стандартной  
 матричной форме  $AX = B$ .

Расположим элементы матрицы-столбца  $X$  в следующем порядке:  $S_1, N_K, S_3, N_D, X_0, Y_0$ . В этом случае матрица  $A$  и столбец свободных членов  $B$  таковы:

$$A = \begin{bmatrix} -0,658 & -0,357 & 0,795 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,753 & 0,934 & 0,607 & -0,867 & 0 & 0 \\ 0 & 1,87 & -0,795 & -1,23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,795 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,607 & 0,867 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1,75 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20,7 \\ 20,7 \\ -10,3 \\ 10,7 \\ 2,1 \end{bmatrix}$$

Для решения системы на ЕС ЭВМ составляем на языке ФОРТРАН программу обращения к библиотечной подпрограмме SIMQ. Матрица  $A$  (в программе одномерный массив  $A$ ) и столбец  $B$  (в программе одномерный массив  $T$ ) вводятся с помощью оператора DATA.

Текст программы и результаты счета приведены на рис. 6.

```

DIMENSION A(36),T(6)
DATA A,T/
*-0.658,-0.753,4*0.,
*-0.357,0.934,1.87,3*0.,
*0.795,0.607,-0.795,-0.795,-0.607,0.,
*-0.5,-0.867,-1.23,0.5,0.867,1.,
*3*0.,1.,6*0.,1.,1.75,
*0.,2*20.7,-10.3,10.7,2.1/
CALL SIMQ(A,T,6,K1)
PRINT 30731,T
30731 FORMAT(10G10.3)
STOP
END

```

-30.4    16.5    -8.96    14.0    -24.4    -6.88

Рис. 6

*Результаты решения:*

$S_1$	$N_K$	$S_3$	$N_D$	$X_0$	$Y_0$
-30,4	16,5	-8,96	14,0	-24,4	-6,88

**Контроль решения.** Составим уравнения моментов относительно точки  $O$  для сил, приложенных к треугольной пластине:

$$\sum_{k=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_k) = S_3 \cdot 2b \cos \beta \sin \alpha_3 + G_2 \frac{2}{3} b \cos \beta + Fb - N_D \frac{b}{2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения  $S_3$  и  $N_D$  и заданные значения  $G_2$  и  $F$ , находим контрольную «невязку»:

$$\Delta = -8,96 \sqrt{3} \cdot 0,607 + 10,7 \sqrt{3} / 3 + 10,3 - 14/2 = -0,058.$$

Отсюда  $\delta = (0,058/30,4) 100\% = 0,19\%$ .

Малость величины  $\delta$  показывает, что полученные на ЭВМ значения реакций могут быть взяты в качестве решения системы (5).

### РАСЧЕТ С-1а

В этом варианте расчет С-1 дополняется условием: определить диапазон значений горизонтально направленной силы  $\bar{F}$ , при которых односторонняя связь в точке  $D$  не нарушается, т. е. давление удовлетворяет условию  $N_D > 0$  ( $N_D$  — проекция силы  $\bar{N}_D$  на направление внутренней нормали к треугольнику в точке  $D$ ).

Уравнения равновесия составляются по рассмотренной методике и решаются на ЭВМ для двух значений  $F$ : один раз — для заданного по условию расчета С-1, другой раз — для  $F=0$ .

```

DIMENSION A(36), T(6), N0(36), B(6)
DATA A0, B/
*-0.658, -0.753, 4*0.,
*-0.357, 0.934, 1.87, 3*0.,
*0.795, 0.607, -0.795, -0.795, -0.607, 0.,
*-0.5, -0.867, -1.23, 0.5, 0.867, 1.,
*3*0., 1., 6*0., 1., 1.73,
*0., 2*20.7, -10.3, 10.7, 2.1/
F=10.3
DO 12 K=1, 2
DO 1 I=1, 36
1 A(I)=A0(I)
DO 2 J=1, 6
2 T(J)=B(J)
T(4)=-F
T(6)=12.4-F
CALL SIMQ(A, T, 6, K1)
PRINT 30731, T
30731 FORMAT(10G10.3)
12 F=0.
STOP
END

```

-30.4	16.5	-8.96	14.0	-24.4	-6.88
-18.4	17.5	-8.99	10.3	-58.8	1.19

Рис. 7

Учитывая линейный характер зависимости реакций от  $F$ , строим по результатам счета график  $N_D(F)$ . По графику определяем диапазон значений  $F$ , при которых  $N_D > 0$ .

Один из возможных вариантов программы для рассмотренного

примера приведен на рис. 7\*, построенный по результатам вычислений график  $N_D(F)$  приведен на рис. 8. Из графика следует, что условие  $N_D > 0$  удовлетворяется при  $F > -28$  кН.

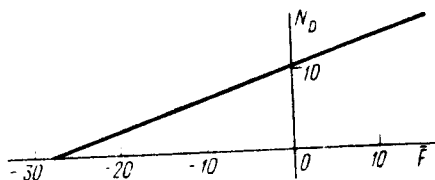


Рис. 8

## Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской стержневой конструкции

### РАСЧЕТ С-2

Описание задания. Рассматривается плоская стержневая конструкция. Схемы конструкций изображены на рис. 9—11. Элементы

Таблица 2

Вариант	$a_r$	$q_r$	$M_r$	$(\cos a_3)_r$	$(\cos a_4)_r$	$(\cos a_5)_r$	$(\cos a_6)_r$
1	0,5	5	8	0,17	0,64	0,64	0,70
2	1,0	1	1	0,50	0,57	0,42	0,34
3	0,6	4	2	0,94	0,34	0,34	0,25
4	1,0	8	4	0,17	0,25	0,34	0,70
5	0,8	4	6	0,08	0,76	0,34	0,25
6	0,8	4	2	0,96	0,70	0,34	0,61
7	0,8	5	5	0,17	0,64	0,70	0,34
8	1,2	6	8	0,42	0,50	0,42	0,57
9	1,0	3	5	0,64	0,94	0,50	0,76
10	0,8	5	4	0,76	0,64	0,57	0,50
11	0,8	6	5	0,42	0,70	0,17	0,70
12	1,0	8	4	0,34	0,42	0,34	0,37
13	1,2	6	3	0,17	0,70	0,64	0,76
14	0,6	4	2	0,70	0,73	0,17	0,95
15	0,8	5	4	0,25	0,42	0,29	0,37
16	1,0	6	1	0,76	0,73	0,25	0,50
17	0,8	5	3	0,95	0,64	0,50	0,70
18	0,6	8	2	0,20	0,76	0,25	0,29
19	1,1	8	6	0,50	0,53	0,34	0,76
20	0,7	2	1	0,50	0,42	0,57	0,43
21	0,9	6	5	0,08	0,34	0,64	0,70
22	1,2	6	2	0,25	0,42	0,45	0,34
23	1,0	5	3	0,34	0,86	0,25	0,90
24	0,7	7	4	0,94	0,70	0,17	0,42
25	1,0	8	5	0,17	0,70	0,94	0,70
26	0,7	6	1	0,34	0,50	0,86	0,76
27	0,8	5	2	0,94	0,54	0,50	0,42
28	0,8	6	3	0,34	0,94	0,42	0,86
29	0,7	1	1	0,42	0,70	0,50	0,37
30	0,8	7	2	0,34	0,57	0,50	0,57

\* На рисунке в последней строке третье и пятое числа следует читать: —0,899 и —5,88.

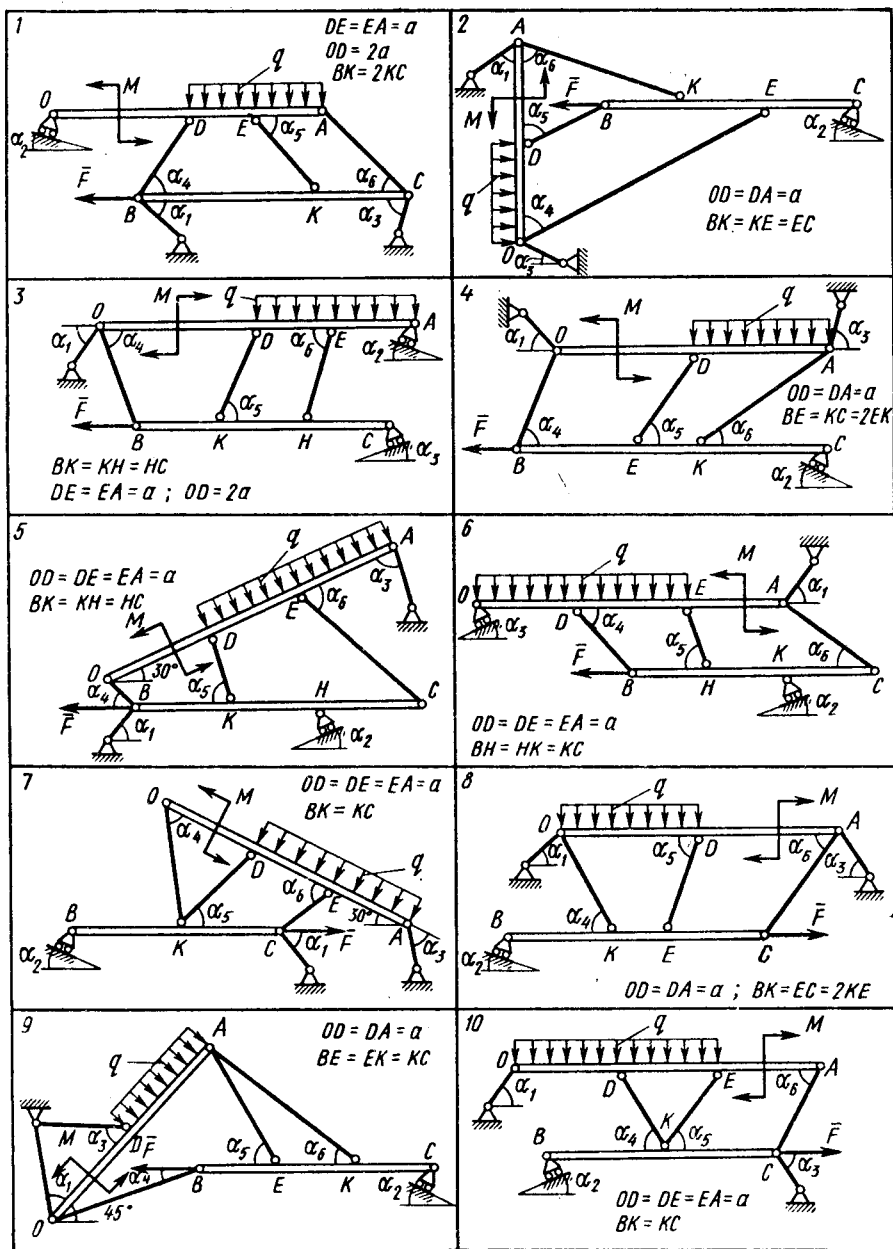


Рис. 9

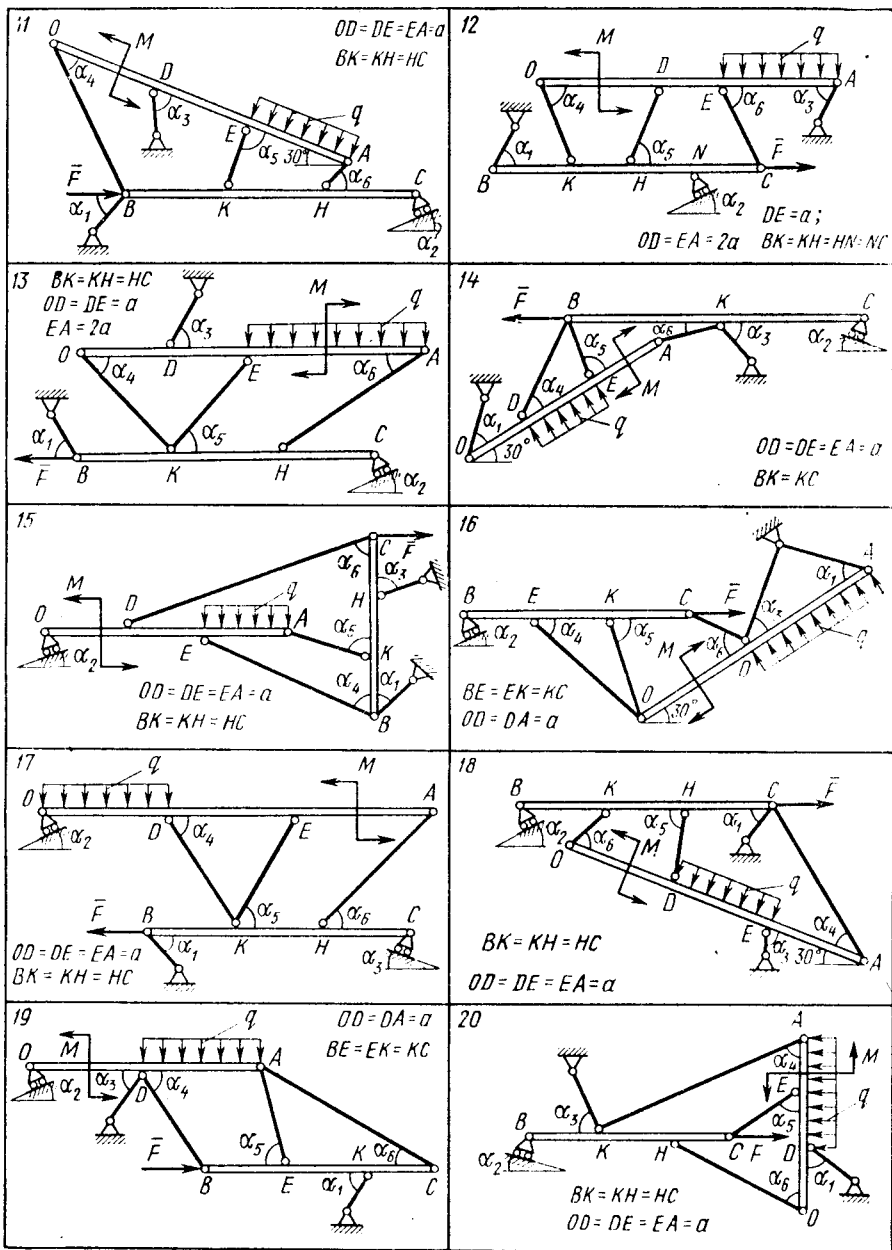


Рис. 10

УМ 6990



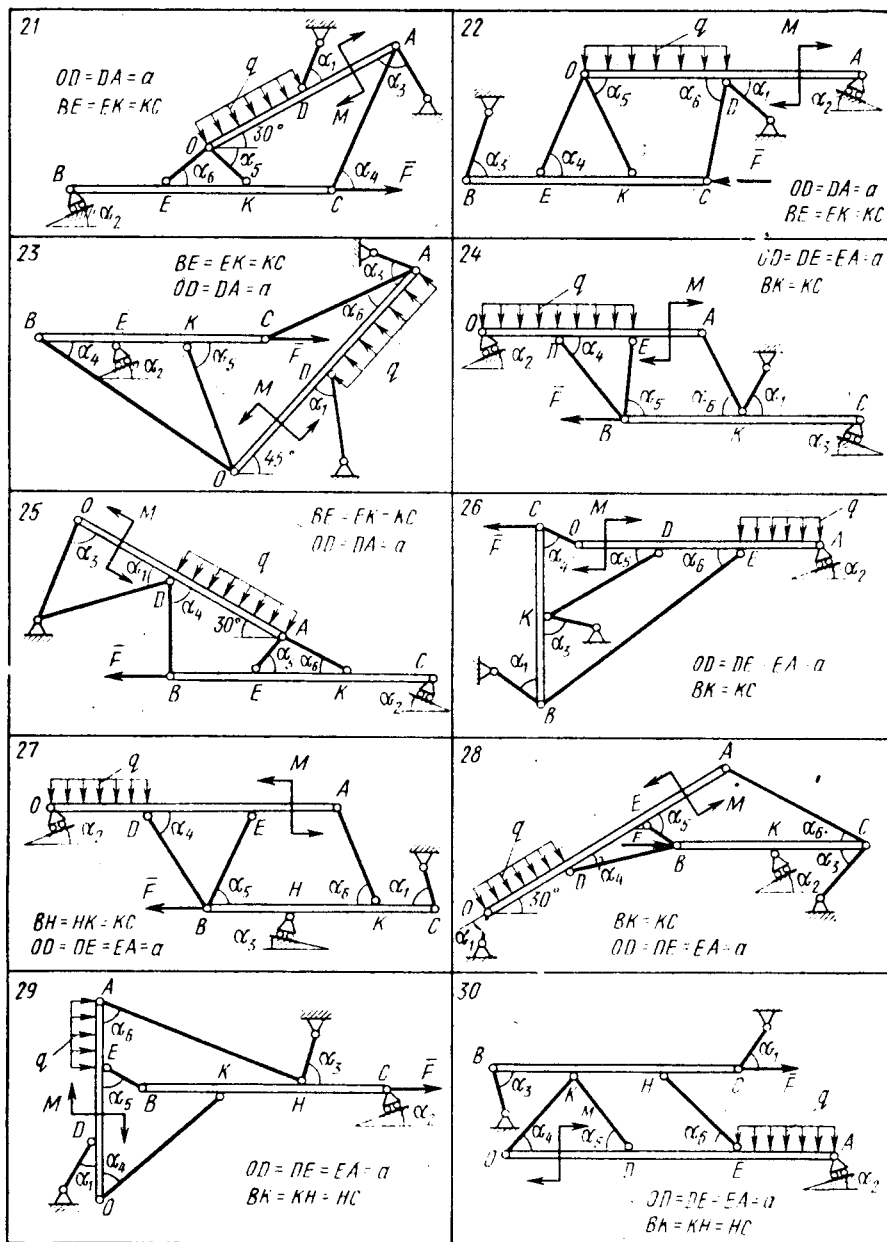


Рис. 11

конструкции считаются абсолютно жесткими. Стержни, изображенные сплошными линиями, невесомые. Трение в шарнирах и катковых опорах отсутствует.

Расчет выполняется по той же методике, что и расчет С-1. Числовые значения величин задаются формулами (1) и табл. 2. Значения величин вычисляются с точностью до трех значащих цифр:

$$G_1 = 4 + 0,1N; G_2 = 6 + 0,1N; F = 2 + 0,1n;$$

$$a = a_T + 0,01N; q = q_T + 0,1N; M = M_T + 0,1N;$$

$$\cos \alpha_1 = 0,6 + 0,01n; \sin \alpha_2 = 0,2 + 0,01n;$$

$$\cos \alpha_i = (\cos \alpha_i)_T + 0,001N \quad (i=3, 4, 5, 6). \quad (1)$$

Здесь  $M$  — момент пары;  $q$  — интенсивность равномерно распределенной нагрузки, силы задаются в килоньютонах.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Схема плоской стержневой конструкции изображена на рис. 12. Вес балки  $OA$  равен  $G_1$ , вес балки  $BC$  —  $G_2$ . Стержни  $BH$ ,  $OB$ ,  $KD$ ,  $KE$  невесомые. Элементы конструкции

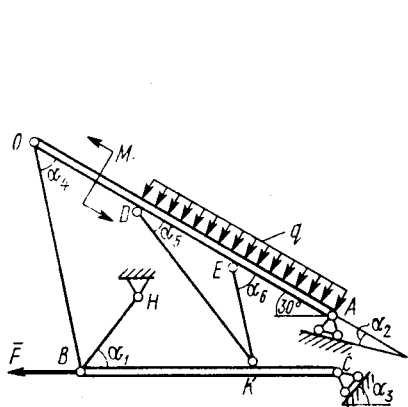


Рис. 12

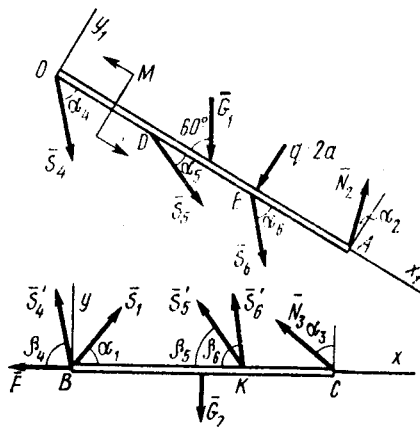


Рис. 13

считаются абсолютно жесткими. Трение в шарнирах и катковых опорах отсутствует.

Дано:  $G_1 = 4,7$  кН,  $G_2 = 6,7$  кН,  $F = 2,3$  кН,  $M = 2,7$  кН·м,  $q = 3,7$  кН/м,  $BK = 2KC = 2b$ ,  $OD = DE = AE = a = 0,87$  м.

Значения тригонометрических функций углов:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\beta_4$	$\alpha_5$	$\beta_5$	$\alpha_6$	$\beta_6$
$\cos \alpha_i$	0,630	0,973	0,177	0,647	0,177	0,867	0,500	0,707	0,259
$\sin \alpha_i$	0,777	0,230	0,984	0,762	0,984	0,500	0,867	0,707	0,966

Здесь  $\beta_i = \alpha_i + 30^\circ$  ( $i=4, 5, 6$ ).

Требуется определить реакции катковых опор  $A$  и  $C$  и усилия в невесомых стержнях  $BH$ ,  $OB$ ,  $KD$ ,  $KE$ .

**Составление уравнений равновесия.** Освободим систему от связей и обозначим реакции, как показано на рис. 13. Принимается, что усилия в стержнях — растягивающие.

Рассмотрим равновесие балок  $OA$  и  $BC$ . На балку  $OA$  действуют сила  $\bar{G}_1$ , равномерно распределенная на длине  $AD$  нагрузка интенсивностью  $q$ , пара сил с моментом  $M$  и реакции связей  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{S}_4$ ,  $\bar{S}_5$ ,  $\bar{S}_6$ . Уравнения равновесия указанных сил в системе координат  $Ox_1y_1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= -N_2 \sin \alpha_2 + S_4 \cos \alpha_1 + S_5 \cos \alpha_5 + S_6 \cos \alpha_6 + \\ &+ G_1 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= N_2 \cos \alpha_2 - S_4 \sin \alpha_4 - S_5 \sin \alpha_5 - S_6 \sin \alpha_6 - \\ &- G_1 \sin 60^\circ - q \cdot 2a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Oz}(\bar{F}_k) &= N_2 \cos \alpha_2 \cdot 3a - S_5 \sin \alpha_5 \cdot a - S_6 \sin \alpha_6 \cdot 2a + \\ &+ M - G_1 \frac{3}{2} a \sin 60^\circ - q \cdot 4a^2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для сил  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}_2$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{N}_3$ ,  $\bar{S}_4' = -\bar{S}_4$ ,  $\bar{S}_5' = -\bar{S}_5$ ,  $\bar{S}_6' = -\bar{S}_6$ , приложенных к балке  $BC$ , уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= S_1 \cos \alpha_1 - N_3 \sin \alpha_3 - S_4 \cos \beta_4 - S_5 \cos \beta_5 - \\ &- S_6 \cos \beta_6 - F = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= S_1 \sin \alpha_1 + N_3 \cos \alpha_3 + S_4 \sin \beta_4 + S_5 \sin \beta_5 + \\ &+ S_6 \sin \beta_6 - G_2 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Kz}(\bar{F}_k) &= -S_1 \sin \alpha_1 \cdot 2b - S_4 \sin \beta_4 \cdot 2b + N_3 \cos \alpha_3 \cdot b + \\ &+ G_2 \frac{b}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим в (2), (3) числовые значения коэффициентов, вычисленных с тремя значащими цифрами. Тогда

$$\begin{aligned} -0,23N_2 + 0,647S_4 + 0,867S_5 + 0,707S_6 + 2,35 &= 0; \\ 0,973N_2 - 0,762S_4 - 0,5S_5 - 0,707S_6 - 10,5 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2,54N_2 - 0,435S_5 - 1,23S_6 - 13,8 &= 0; \\
 0,63S_1 - 0,984N_3 - 0,177S_4 - 0,5S_5 - 0,259S_6 - 2,3 &= 0; \\
 0,777S_1 + 0,177N_3 + 0,984S_4 + 0,867S_5 + 0,966S_6 - 6,7 &= 0; \\
 -1,55S_1 + 0,177N_3 - 1,97S_4 + 3,35 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

```

DIMENSION T(6)
DATA T /6*0./
DO 12 K=1,25
T(1)=(0,177*T(3)-1,97*T(4)+3,35)/1,55
T(2)=(13,8+0,435*T(5)+1,23*T(6))/2,54
T(3)=(0,63*T(1)-0,179*T(4)-0,5*T(5)-
-0,259*T(6)-2,3)/0,984
T(4)=(0,973*T(2)-0,5*T(5)-0,707*T(6)-10,5)/0,762
T(5)=(0,23*T(2)-0,647*T(4)-0,707*T(6)-2,35)/0,867
T(6)=(6,7-0,777*T(1)-0,177*T(3)-
-0,984*T(4)-0,867*T(5))/0,966
D=0,531*T(3)+1,7*T(5)+1,9*T(6)-10,1
PRINT 30731,T
*,D
30731 FORMAT(10G10.3)
12 CONTINUE
STOP
END

```

2.16	5.43	-0.954	-6.84	3.34	3.90	12.9
10.7	10.4	1.50	-11.3	1.21	8.42	8.78
16.7	9.72	7.55	-9.97	0.446	1.91	-1.69
15.7	6.43	8.00	-7.63	3.13	-2.35	-4.47
12.9	4.63	6.31	-7.49	6.07	-2.39	-0.786
12.4	5.32	4.51	-8.76	7.10	-1.39	2.09
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
14.9	4.66	5.31	-9.55	9.77	-5.06	-0.004
14.9	4.65	5.31	-9.55	9.78	-5.07	-0.003

Рис. 14

**Решение задачи на ЭВМ.** Систему уравнений (4) решаем на ЭВМ методом Зайделя [8]. Для этого преобразуем систему уравнений (4) к виду

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (0,177N_3 - 1,97S_4 + 3,35)/1,55; \\
 N_2 &= (13,8 + 0,435S_5 + 1,23S_6)/2,54; \\
 N_3 &= (0,63S_1 - 0,177S_4 - 0,5S_5 - 0,259S_6 - 2,3)/0,984; \\
 S_4 &= (0,973N_2 - 0,5S_5 - 0,707S_6 - 10,5)/0,762; \\
 S_5 &= (0,23N_2 - 0,647S_4 - 0,707S_6 - 2,35)/0,867; \\
 S_6 &= (6,7 - 0,777S_1 - 0,177N_3 - 0,984S_4 - 0,867S_5)/0,966.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В качестве первого приближения принимается  $S_1^{(1)} = \dots = S_6^{(1)} = 0$ . Программой предусмотрено 25 итераций.

Контрольную «невязку»  $\Delta$  вычисляем на каждом шаге итераций. Для определения  $\Delta$  составим уравнение равновесия

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz}(\bar{F}_k) = 0 \text{ для сил, приложенных к балке } BC: \quad ?$$

$$N_3 \cos \alpha_3 \cdot 3b + S_5 \sin \beta_5 \cdot 2b + S_6 \sin \beta_6 \cdot 2b - G_3 \cdot 3b/2 = 0.$$

Подстановка в это уравнение значений  $N_3^{(j)}$ ,  $S_5^{(j)}$  и  $S_6^{(j)}$ , найденных из (5) для  $j$ -го приближения, дает «невязку» этого приближения

$$\Delta^{(j)} = 0,531N_3^{(j)} + 1,73S_5^{(j)} + 1,93S_6^{(j)} - 10,1. \quad (6)$$

Один из возможных вариантов программы приведен на рис. 14. Реакции в программе обозначены через  $T(i)$  ( $i=1, \dots, 6$ ), «невязка»  $\Delta^{(j)}$  — через  $D$ . На печать выводятся реакции и невязка на каждом шаге итераций.

**Контроль решения.** Относительная «невязка» последнего (25-го) приближения  $\delta = (0,003/14,9) 100\% \approx 0,02\%$ .

Малость величины  $\delta$  показывает, что в качестве решения системы (4) могут быть взяты величины реакций для этого приближения:  $S_1 = 14,9$  кН,  $N_2 = 4,65$  кН,  $N_3 = 5,31$  кН,  $S_4 = -9,55$  кН,  $S_5 = -9,78$  кН,  $S_6 = -5,07$  кН.

## КИНЕМАТИКА

### Кинематика плоского механизма с одной степенью свободы

#### РАСЧЕТ К-1

**Описание задания.** Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики плоских механизмов.

Рассматривается механизм с одной степенью свободы и шарнирным соединением звеньев кинематических цепей. Варианты схем представлены на рис. 15—19. Задано вращение кривошипа  $OA$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_{1z} = 2\pi/\tau$ , где  $\tau$  — время оборота кривошипа.

Исходные данные определяются формулами (1) и табл. 3. Значения величин вычисляются с точностью до трех значащих цифр

$$\begin{aligned} \tau &= 0,24N, \quad R_1 = 0,2 + 0,01n, \quad R_i = R_{i\tau} + 0,01N; \\ \varphi_1(0) &= 0, \quad \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N \quad (i=2, 3, 4). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $R_i$  — длина  $i$ -го звена. Под длиной звена для колеса понимается его радиус. В том случае, когда радиус колеса не использует

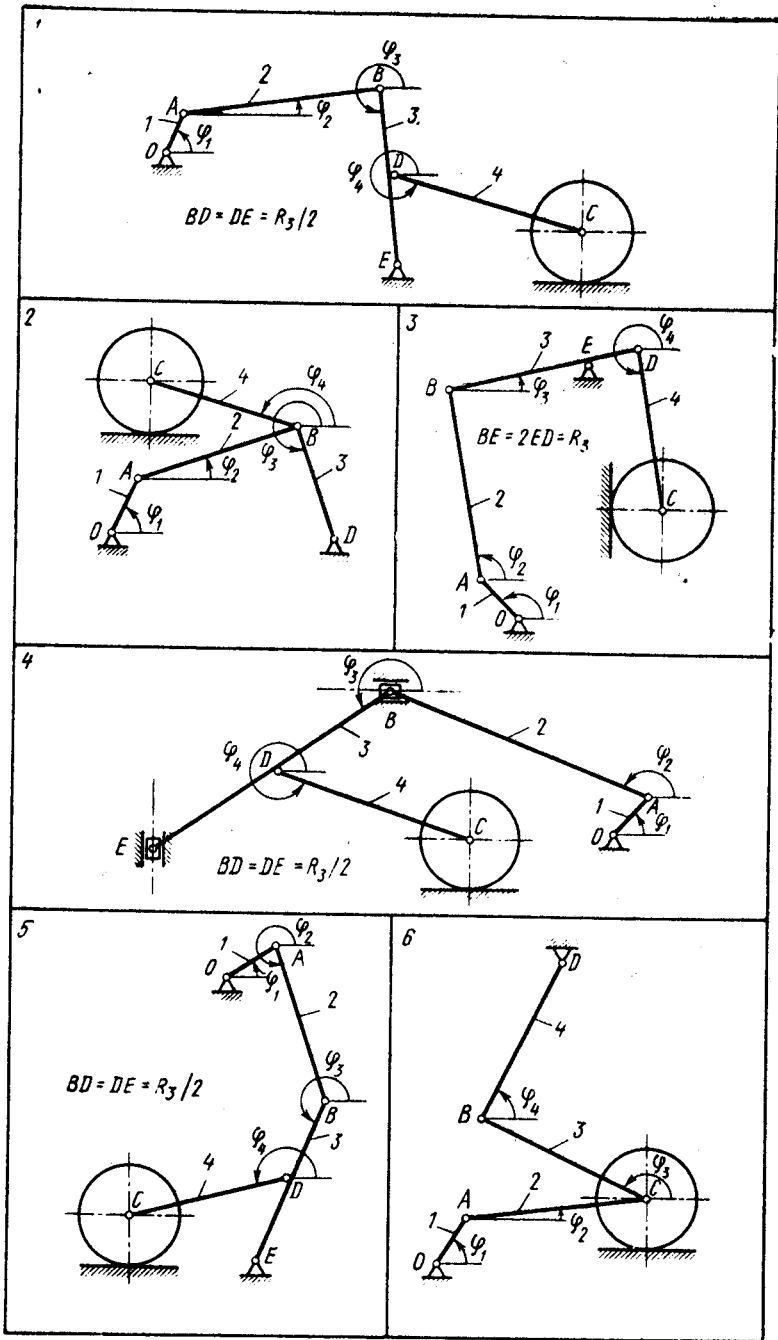


Рис. 16

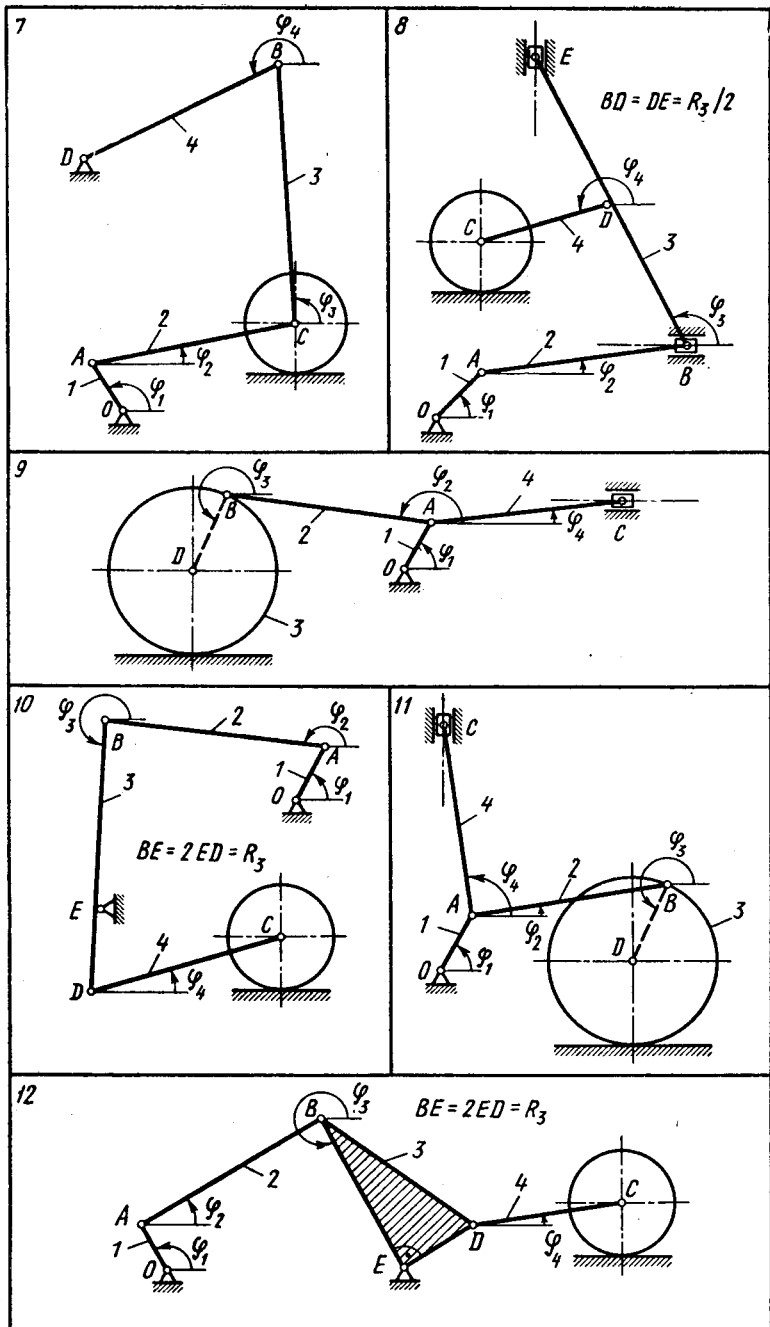


Рис. 16

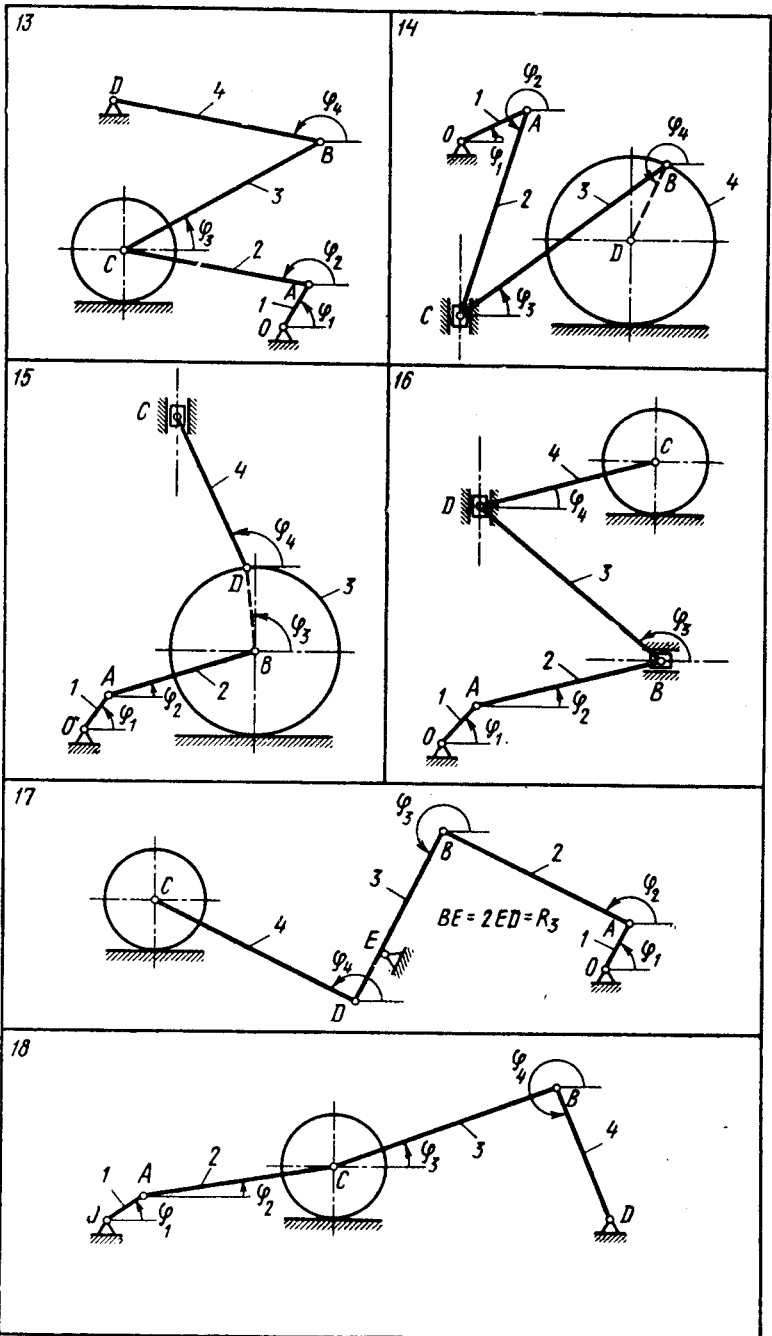


Рис. 17



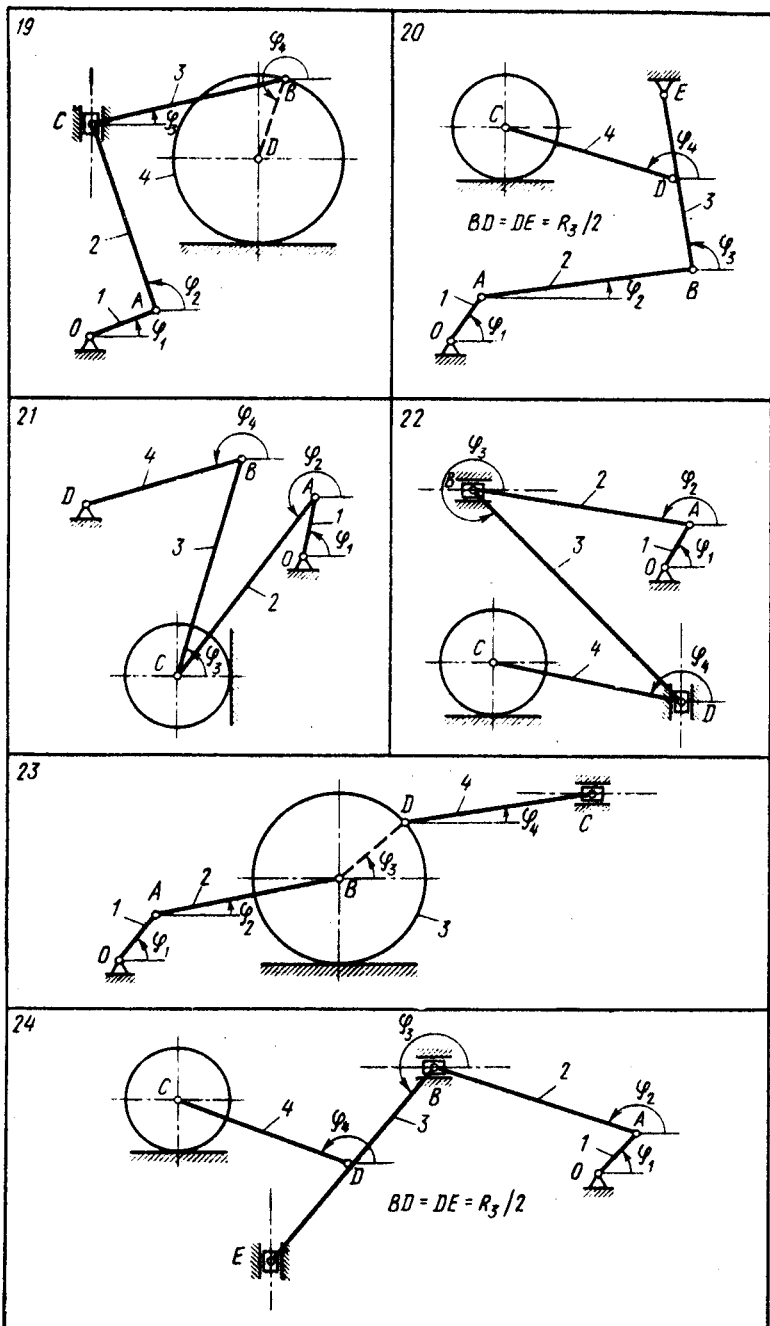


Рис. 18

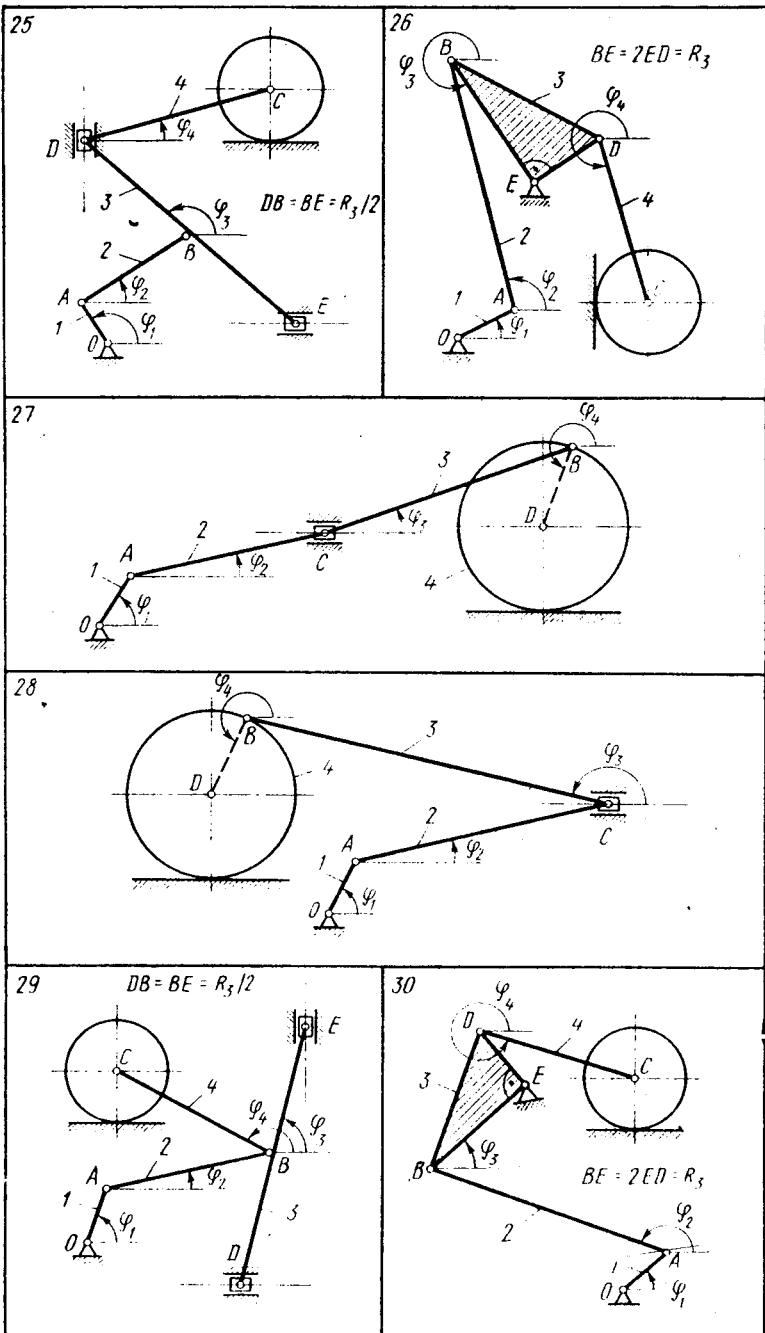


Рис. 19

Вариант	$R_{2r}$	$R_{3r}$	$R_{4r}$	$\varphi_{2r}$	$\varphi_{3r}$	$\varphi_{4r}$
1	1	1,00	1,00	0,50	4,70	5,70
2	1	1,00	1,00	0,70	5,30	2,60
3	1	0,80	1,00	2,10	0,70	5,20
4	1,5	1,50	1,00	2,80	3,60	5,70
5	1	1,00	1,00	5,50	3,90	3,60
6	1	1,00	0,80	0,50	2,60	1,20
7	1	1,20	0,80	0,50	1,90	3,50
8	1	1,80	0,80	0,50	2,10	3,60
9	1	0,50	1,00	2,60	3,90	0,50
10	1	0,80	1,00	2,60	4,20	0,50
11	1	0,50	1,00	0,50	4,10	1,70
12	1	1,00	0,80	0,70	5,00	0,50
13	1	1,20	1,00	2,60	0,70	3,10
14	1	1,50	0,50	4,20	0,70	4,70
15	1	0,50	1,00	0,50	1,50	2,00
16	1	1,20	1,00	0,50	2,30	0,30
17	1	0,80	1,00	2,60	3,90	2,60
18	1	1,00	0,80	0,50	0,50	5,20
19	1	1,00	0,50	2,10	0,50	4,70
20	1	1,00	0,80	0,50	2,00	2,60
21	1	1,00	0,80	3,90	1,00	3,10
22	1	1,20	0,80	2,40	5,00	2,60
23	1	0,50	1,00	0,50	0,50	0,30
24	1	1,40	0,80	2,60	3,90	2,60
25	0,8	1,60	1,00	0,70	1,60	0,50
26	1,6	0,80	1,00	1,80	5,50	5,30
27	1	1,00	0,50	0,50	0,50	4,10
28	1	1,20	0,50	0,50	2,60	4,10
29	0,8	1,40	1,00	0,50	1,50	2,60
30	1,2	0,80	1,00	2,50	1,00	5,70

ся в расчете, его длина не задается, а при вычерчивании схемы принимается равной  $1,2 R_1$ .

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения механизма. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к составлению уравнений движения.** Выражения для зависимости трех неизвестных угловых скоростей  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$  от заданной скорости  $\omega_{1z}$  получаются из уравнений трех внешних связей, налагаемых на систему. Чтобы составить эти уравнения, надо выразить через  $\omega_{iz}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) скорости точек, в которых налагаются внешние связи, и приравнять их нулю. Выражения для скоростей получаются последовательным, от звена к звену, применением формул кинематики твердого тела

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (2)$$

Последовательность звеньев кинематических цепей (граф вычислений) может выбираться неоднозначно. Предпочтительны наименее трудоемкие варианты.

Из уравнений внешних связей находят:

$$\omega_{2z} = \omega_{2z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{1z});$$

$$\omega_{3z} = \omega_{3z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{1z}, \omega_{2z});$$

$$\omega_{4z} = \omega_{4z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2, \varphi_4, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}). \quad (3)$$

Уравнения (3) позволяют определить угловые скорости звеньев для фиксированного момента времени при заданных в этот момент значениях  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Изменение  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , а следовательно, и  $\omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$  во времени определится, если дополнить систему (3) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой при заданных начальных значениях  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$  решает кинематическую задачу о движении плоского механизма.

Система (3), (4) описывает движение механизма с одной степенью свободы в избыточном наборе четырех переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Поэтому начальные значения всех углов нельзя задавать произвольно. Значения  $\varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$  вычисляются предварительно для заданного  $\varphi_1(0)$  и приводятся в (1) и табл. 3.

Зависимость от  $\varphi_i, \omega_{iz}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) для требуемой по условию скорости точки  $C$  получается аналогично с помощью формул вида (2).

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Нелинейная система дифференциальных уравнений (3), (4) с заданными начальными условиями интегрируется на интервале времени  $\tau$ . Запись выражений для  $\omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$  и скорости точки  $C$  должна обеспечивать возможность присвоения последовательных значений этих переменных на каждом шаге интегрирования. В разных вариантах заданий наиболее компактная последовательность записи может быть различной, например  $\omega_{2z}(\varphi_i, \omega_{1z}), v_{Cx}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}), \omega_{4z}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}, v_{Cx}), \omega_{3z}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{4z}, v_{Cx})$ . На печать с шагом  $\Delta t = \tau/24$  выводятся переменные  $t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$  и скорость точки  $C$ . Для упрощения программы линейные размеры звеньев вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнения (3), (4) интегрируются по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать систему (3), (4) методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов; вывести результаты не только в виде таблицы, но и в виде графиков и т. д.

**Контроль решения.** Проверка правильности задачи осуществляется на всех этапах ее решения. Этап составления уравнений за-

канчивается оценкой величин правых частей уравнений (3) для заданных начальных значений углов. Кинематические схемы механизмов и числовые значения параметров во всех вариантах задания подобраны так, что угловые скорости  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$  должны быть в несколько раз меньше величины  $\omega_{1z}$ . Нарушение этого правила указывает на ошибку в составлении уравнений (3). Сравнение результатов этих вычислений с результатами счета на ЭВМ позволяет также выявить ошибки программирования соотношений (3).

После решения задачи на ЭВМ проводится анализ таблицы результатов. Первая строка таблицы содержит найденные начальные значения  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$ , скорость точки  $C$  и начальные значения углов  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$ . Последняя строка с некоторой погрешностью счета должна повторять первую.

Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов.

Последняя проверка проводится путем сравнения результатов счета на ЭВМ с результатами графоаналитического решения задачи. Механизм изображается в масштабе 1:10 в момент времени  $t = (N+1)\Delta t$  ( $N+2$ -я строка таблицы счета). Для этого положения требуется найти мгновенные центры скоростей звеньев, их угловые скорости, изобразить векторы скоростей точек, в которых соединяются звенья, указать направление вращения звеньев. Результаты этого решения должны быть близкими с результатами решения задачи на ЭВМ, содержащимися в  $(N+2)$ -й строке таблицы счета.

**Примечание.** При графоаналитическом решении задачи длины отрезков рекомендуется определять с помощью линейки по рисунку.

### **Защита расчета. Типовые вопросы:**

1. Почему в вариантах задания 1—8, 10, 12, 13, 16—18, 20—22, 24—26, 29, 30 можно не задавать радиус колеса?

2. Можно ли решить задачи 9, 11, 14, 15, 19, 23, 27, 28, если допустить проскальзывание колеса?

3. В задачах 1, 4, 5, 8, 12, 20, 24, 26, 30 указать углы, определяющие положение звеньев при переходе от точки  $E$  к точке  $C$ .

4. Как изменятся уравнения движения, если кривошип  $OA$  вращается равноускоренно?

5. Как изменятся уравнения, определяющие угловые скорости механизма, если в вариантах 1—8, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 29, 30 шарнир  $C$ , соединяющий стержень и колесо, перенести из центра колеса на его обод?

6. Можно ли задавать произвольным образом начальные значения углов  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$ ,  $\varphi_4(0)$ ?

7. Каким образом нужно дополнить уравнения движения, чтобы при счете определить максимальное отклонение точки  $C$ ?

8. Какие уравнения следует составить для определения  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$  при заданном движении точки  $C$ ?

9. Изобразить на рисунке векторы скоростей тех или иных точек.

10. Найти м. ц. с. звеньев в произвольном положении механизма.

11. Определить графически по графику  $\varphi_2(t)$  значение  $\varphi_2$  в момент времени  $t_{N+2}$  и сравнить с результатом вычисления величины  $\omega_{2z}$  на ЭВМ.

12. Объяснить взаимное расположение экстремумов функции  $\varphi_2(t)$  и нулей  $\omega_{2z}(t)$ .

13. Объяснить по виду функции  $\omega_{2z}(t)$  характер изменения функции  $\varphi_2(t)$ .

14. Определить характер мгновенного движения шатуна в моменты времени, соответствующие точкам пересечения графика  $\omega_{2z}(t)$  с осью абсцисс.

15. Объяснить значение каждого оператора в программе.

16. Как изменится программа, если кривошип  $OA$  вращается с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon_{1z}$ ?

17. Как нужно дополнить программу, если требуется определить перемещение точки  $C$  в зависимости от времени?

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** В плоском механизме (рис. 20) кривошип  $OA$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega_{1z}$ , приводит в движение с помощью шатуна  $AB$  колесо 3. Колесо катится по горизонтальной прямой без скольжения. К центру  $D$  колеса шарнирно прикреплен шатун  $DC$ , сообщающий возвратно-поступательное движение ползуну  $C$ .

Дано:  $OA=R_1=0,23$  м,  $AB=R_2=1,07$  м,  $BD=R_3=0,57$  м,  $DC=R_4=0,87$  м,  $\omega_{1z}=3,74$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi_1(0)=0$ ,  $\varphi_2(0)=2,97$  рад,  $\varphi_3(0)=4,17$  рад,  $\varphi_4(0)=3,97$  рад,  $\tau=1,68$  с,  $\Delta t=0,07$  с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения механизма, определяющие изменение во времени угловых скоростей, углов поворота звеньев и скорости точки  $C$ . 2. Решить полученную систему уравнений на ЭВМ на интервале времени  $\tau$ . 3. Построить графики  $\omega_{2z}(t)$ ,  $\omega_{3z}(t)$ ,  $v_{Cy}(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ . 4. Для момента времени  $t=8\Delta t=0,56$  с определить с помощью графоаналитического метода угловые скорости звеньев и сравнить с результатом счета на ЭВМ.

**Составление уравнений движения.** Составим уравнения для трех неизвестных угловых скоростей  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$ . Они определяются внешними связями, налагаемыми на механизм: в точке  $P_3$

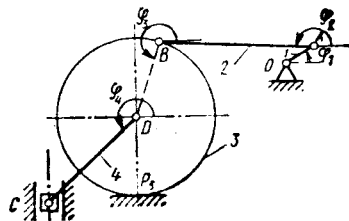


Рис. 20

(м. ц. с. третьего звена) и в точке  $C$  (ползун). Уравнения этих связей:

$$v_{P_3x} = 0, \quad v_{P_3y} = 0, \quad v_{Cx} = 0. \quad (5)$$

При вычислении скорости точки  $P_3$  последовательно находим скорости точек в соответствии с графом  $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} D \xrightarrow{3} P_3$ . Стрелкой обозначаем переход от точки, принимаемой за полюс, к точке, скорость которой вычисляется. Индекс над стрелкой соответствует номеру тела, для которого совершается переход. Учитывая, что скорость точки  $O$  равна нулю, получим

$$\bar{v}_{P_3} = \bar{\omega}_1 \times \overline{OA} + \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BD} + \bar{\omega}_3 \times \overline{DP_3}.$$

Проецируем обе части этого равенства на координатные оси:

$$v_{P_3x} = -\omega_{1z}R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}R_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z}R_3 \sin \varphi_3 - \omega_{3z}R_3 \sin \frac{3\pi}{2};$$

$$v_{P_3y} = \omega_{1z}R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}R_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}R_3 \cos \varphi_3 + \omega_{3z}R_3 \cos \frac{3\pi}{2}. \quad (6)$$

Скорость точки  $C$  вычисляем в соответствии с графом  $P_3 \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} C$ . Учитывая, что скорость точки  $P_3$  равна нулю, получим

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_3 \times \overline{P_3D} + \bar{\omega}_4 \times \overline{DC}.$$

Отсюда

$$v_{Cx} = -\omega_{3z}R_3 \sin \frac{\pi}{2} - \omega_{4z}R_4 \sin \varphi_4; \quad (7)$$

$$v_{Cy} = \omega_{3z}R_3 \cos \frac{\pi}{2} + \omega_{4z}R_4 \cos \varphi_4. \quad (8)$$

Приравняв нулю правые части (6), (7), получим систему алгебраических уравнений для определения  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$ :

$$-\omega_{1z}R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}R_2 \sin \varphi_2 + \omega_{3z}R_3(1 - \sin \varphi_3) = 0;$$

$$\omega_{1z}R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}R_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}R_3 \cos \varphi_3 = 0;$$

$$-\omega_{3z}R_3 - \omega_{4z}R_4 \sin \varphi_4 = 0. \quad (9)$$

Разрешим систему (9) и подставим числовые значения  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $\omega_{1z}$ . Тогда

$$\omega_{2z} = -0,804 [\cos \varphi_1 + \sin (\varphi_1 - \varphi_3)] / [\cos \varphi_2 + \sin (\varphi_2 - \varphi_3)];$$

$$\omega_{3z} = -(1,51 \cos \varphi_1 + 1,88\omega_{2z} \cos \varphi_2) / \cos \varphi_3;$$

$$\omega_{4z} = -0,655\omega_{3z} / \sin \varphi_4. \quad (10)$$

Дополним (10) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \quad \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (11)$$

Проекцию скорости ползуна  $C$  на направление его движения из (8):

$$v_{Cy} = 0,87\omega_{4z} \cos \varphi_4. \quad (12)$$

```

DATA DT, T, F1, F2, F3, F4, OM1 /
+0.07, 0., 0., 2.97, 4.17, 3.97, 3.74 /
DO 12 K=1, 25
OM2=-0.804*(COS(F1)+SIN(F1-F3)) /
/ (COS(F2)+SIN(F2-F3))
OM3=-(1.51*COS(F1)+1.88*OM2*COS(F2))/COS(F3)
OM4=-0.655*OM3/SIN(F4)
VC=0.87*OM4*COS(F4)
PRINT 30731, T
*, OM2, OM3, OM4, VC, F2, F3, F4
30731 FORMAT(10G10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F1+OM2*DT
F3=F1+OM3*DT
F4=F1+OM4*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.778	0.132	0.117	-0.069	2.97	4.17	3.97
0.070	0.702	0.290	0.256	-0.149	3.02	4.18	3.98
0.140	0.582	0.441	0.385	-0.219	3.07	4.20	4.00
0.210	0.426	0.576	0.489	-0.271	3.11	4.23	4.02
0.280	0.246	0.685	0.566	-0.300	3.14	4.27	4.06
0.350	0.053	0.757	0.607	-0.305	3.16	4.32	4.10
0.420	-0.139	0.781	0.609	-0.287	3.17	4.37	4.14
0.490	-0.321	0.751	0.570	-0.251	3.16	4.43	4.18
0.560	-0.483	0.663	0.492	-0.202	3.13	4.48	4.22
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
1.61	0.804	-0.021	0.018	0.101	2.90	4.20	4.00
1.68	0.779	0.140	0.121	-0.069	2.96	4.19	4.00

Рис. 21

Для контроля правильности проделанных преобразований вычислим по (10) в начальном положении механизма угловые скорости  $\omega_{2z} = 0,778$  рад/с,  $\omega_{3z} = 0,132$  рад/с,  $\omega_{4z} = 0,117$  рад/с. Эти величины составляют 0,1—0,4 от величины  $\omega_{1z}$ , что соответствует оговоренным условиям.

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Вычисления в силу уравнений (10)—(12) будем проводить на ЭВМ с программированием на языке ФОРТРАН. Конечно-разностная схема Эйлера для уравнений (10), (11) приводит к следующим уравнениям,



связывающим значения углов и угловых скоростей в начале и конце  $k$ -го шага интегрирования:

$$\varphi_1^{(k+1)} = \varphi_1^{(k)} + \omega_{1z}^{(k)} \Delta t, \dots, \varphi_4^{(k+1)} = \varphi_4^{(k)} + \omega_{4z}^{(k)} \Delta t.$$

Программа счета представлена на рис. 21.

На рисунке в 13—15-й строках программы вместо F1 следует читать: F2, F3, F4.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные ...	$t$	$\Delta t$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\omega_{1z}$	$\omega_{2z}$	$\omega_{3z}$	$\omega_{4z}$	$v_{cy}$
Обозначения ...	T	DT	F1	F2	F3	F4	OM1	OM2	OM3	OM4	VC

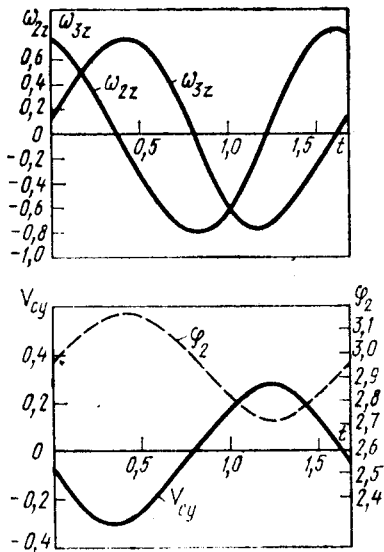


Рис. 22

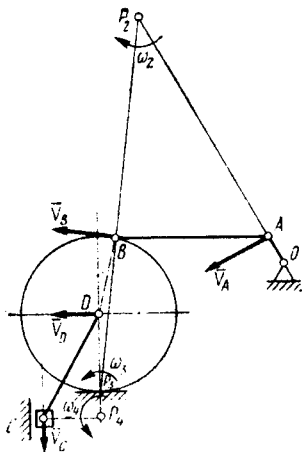


Рис. 23

Начальные значения  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$ , шаг  $\Delta t$  и угловая скорость вращения  $\omega_{1z}$  кривошипа OA вводятся с помощью оператора DATA. Длины  $R_1 \dots, R_4$  вводятся как числовые константы.

По результатам решения (см. рис. 21) на рис. 22 построены графики  $\omega_{2z}(t)$ ,  $\omega_{3z}(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $v_{cy}(t)$ .

**Контроль решения.** Графики на рис. 22 не имеют разрывов. Значения переменных при  $t=0$  и  $t=\tau$  совпадают с хорошей точностью, что соответствует периодическому характеру движения механизма при равномерном вращении ведущего звена.

Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения углов поворота звеньев, соответствующих моменту времени  $t=0,56$  с для строки с номером  $N+2=9$ :  $\varphi_1=3,74 \cdot 0,56 = 2,09$  рад  $\approx 120^\circ$ ,  $\varphi_2=3,13$  рад  $\approx 180^\circ$ ,  $\varphi_3=4,48$  рад  $\approx 257^\circ$ ,  $\varphi_4=4,22$  рад  $\approx 242^\circ$ .

Это положение механизма изобразим на рис. 23 в масштабе 1 : 10. Построим мгновенные центры скоростей  $P_2, P_3, P_4$  соответствующих звеньев. Построим векторы скоростей точек  $A, B, C, D$ , укажем дужками направления вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки  $C$ :

$$\omega_2 = v_A / AP_2 = \omega_1 OA / AP_2 = 3,74 \cdot 0,23 / 1,81 = 0,48 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_B / BP_3 = \omega_2 BP_2 / BP_3 = 0,48 \cdot 1,58 / 1,13 = 0,67 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = v_D / DP_4 = \omega_3 P_3 / DP_4 = 0,67 \cdot 0,57 / 0,95 = 0,52 \text{ рад/с};$$

$$v_C = \omega_4 CP_4 = 0,52 \cdot 0,39 = 0,203 \text{ м/с}.$$

Эти результаты соответствуют данным из девятой строки таблицы счета.

## Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы

### РАСЧЕТ К-2

**Описание задания.** Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики плоского механизма. Рассматривается механизм с двумя степенями свободы. Определяется его движение по заданному движению одной из точек.

Варианты схем представлены на рис. 24, 25. Точка  $A$  для одних вариантов движется горизонтально со скоростью  $v_{Ax} = v \sin(pt + \alpha)$ ;  $v_{Ay} = 0$ , для других — вертикально со скоростью  $v_{Ax} = 0$ ;  $v_{Ay} = v \sin(pt + \alpha)$ . Здесь  $p = 2\pi/\tau$ ,  $\tau$  — период.

Исходные данные определяются формулами (1) и табл. 4:

$$v = 9/N, \tau = 0,24N, \alpha = 0,01N;$$

$$r_1 = r_{1\tau} + 0,01n, r_i = r_{i\tau} + 0,01N;$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_{1\tau} + 0,01n, \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N (i = 2, 3, 4). \quad (1)$$

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения механизма. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Расчет выполняется по методике, описанной в расчете К-1.

При защите расчета предлагается ответить на вопросы, аналогичные приведенным в расчете К-1, а также на вопросы типа:

1. Как изменится решение задачи, если задан другой закон изменения координат точки  $A$ , например точка движется с постоянной скоростью по дуге заданной окружности?

2. Наложить на механизм дополнительную связь, ограничив направляющими движение точки  $A$  в заданном направлении, и составить уравнения для определения  $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}$  при заданном законе измерения угловой скорости  $\omega_{4z} = \omega_{4z}(t)$ .

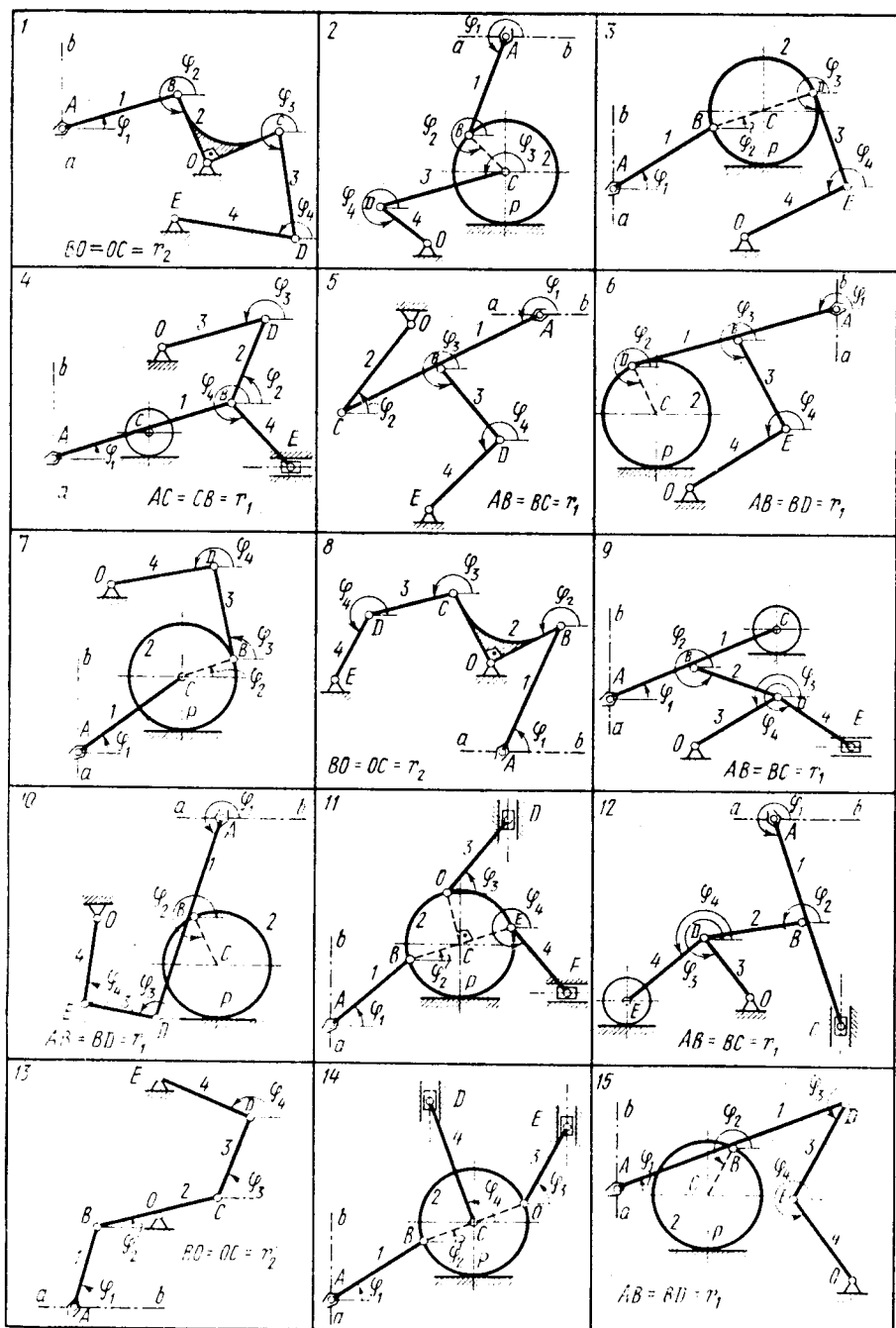


Рис. 24

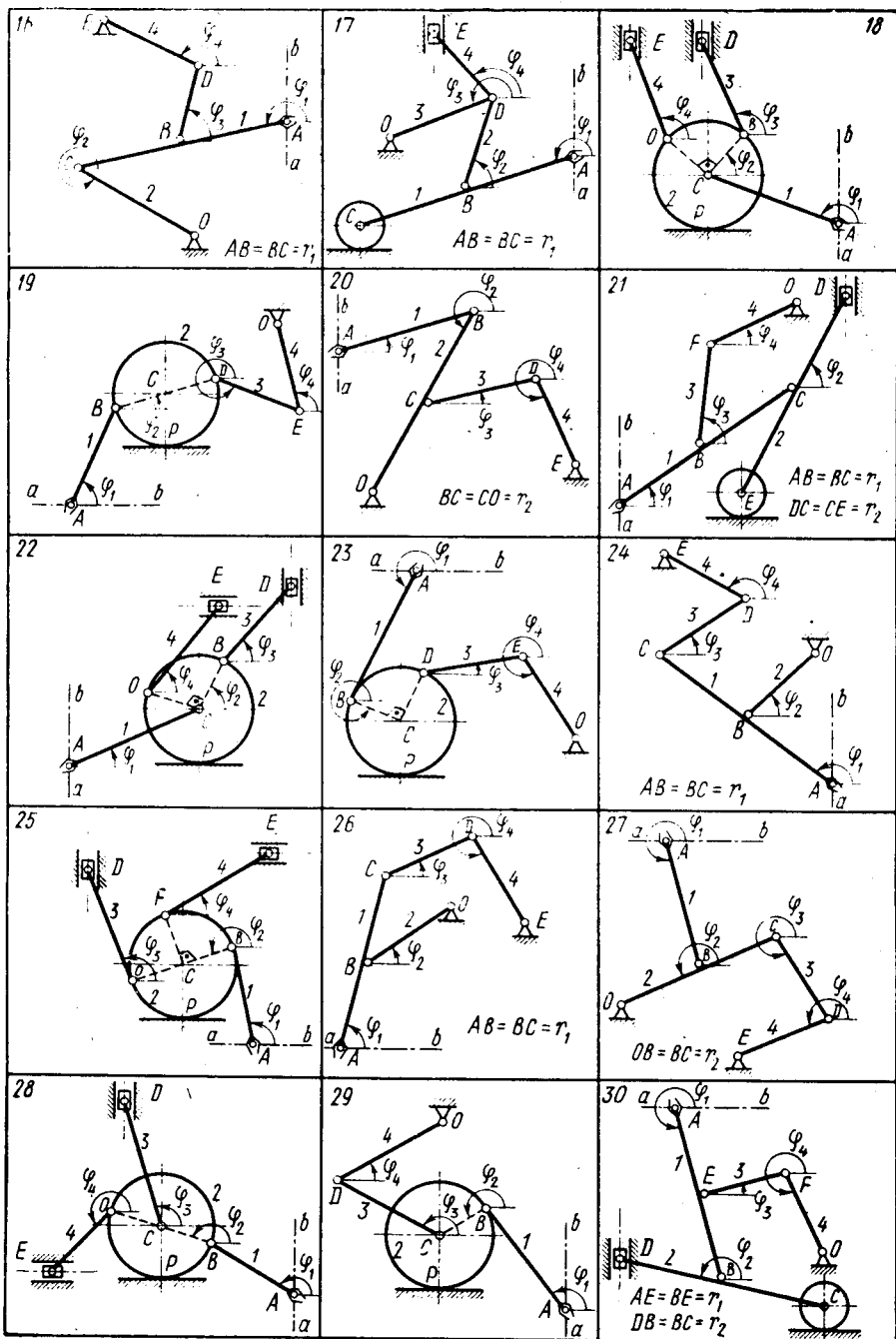


Рис. 25

Вариант	$r_{1r}$	$r_{2r}$	$r_{3r}$	$r_{4r}$	$\varphi_{1r}$	$\varphi_{2r}$	$\varphi_{3r}$	$\varphi_{4r}$
1	0,9	0,6	0,8	0,8	0,4	5,2	4,9	2,8
2	0,9	0,5	1,0	0,5	4,2	5,5	3,5	5,6
3	1,0	0,5	0,9	0,9	0,4	0,2	5,2	3,6
4	0,9	0,8	0,8	0,7	0,3	1,0	3,7	5,5
5	1,0	0,8	0,9	0,9	3,6	1,0	5,5	4,0
6	1,0	0,5	0,9	0,9	3,0	5,2	5,5	3,3
7	1,0	0,5	0,8	0,8	0,5	0,1	1,6	3,1
8	1,0	0,6	0,7	0,7	1,0	3,6	3,2	4,1
9	0,9	0,8	0,8	0,9	0,4	5,7	3,6	5,6
10	1,0	0,5	0,7	0,7	4,2	5,2	3,0	1,4
11	0,9	0,5	0,8	0,8	0,5	0,3	0,9	5,6
12	1,0	0,8	0,6	0,8	5,0	3,2	5,4	3,7
13	0,8	0,5	0,8	0,8	1,2	0,2	1,2	2,7
14	1,0	0,5	0,7	1,1	0,5	0,2	1,0	1,8
15	1,0	0,5	0,9	0,9	0,2	4,2	4,2	5,2
16	0,9	1,0	0,6	0,8	3,3	5,7	1,1	2,7
17	1,0	0,8	0,8	0,8	3,5	1,2	3,3	2,0
18	1,0	0,5	0,7	0,7	2,7	0,7	1,9	1,9
19	0,9	0,5	0,8	0,8	1,0	0,1	5,8	1,8
20	1,0	0,8	0,9	0,9	0,3	4,1	0,2	5,1
21	0,9	1,0	0,8	0,8	0,5	1,0	1,3	0,4
22	1,0	0,5	0,7	0,7	0,4	1,0	0,7	0,7
23	1,0	0,5	0,8	0,8	4,1	5,7	0,3	5,5
24	0,9	0,8	0,8	0,7	2,5	0,7	0,6	2,7
25	0,9	0,5	0,9	0,9	1,6	3,5	2,1	0,6
26	0,8	0,8	0,9	0,9	1,2	0,6	0,5	5,2
27	1,0	0,6	0,7	0,7	4,9	3,6	5,2	3,7
28	0,8	0,5	0,7	1,0	2,6	3,0	1,9	3,9
29	0,9	0,5	0,8	0,8	2,1	3,7	2,7	0,5
30	0,8	0,8	0,7	0,7	5,1	2,8	0,3	5,2

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Рассматривается плоский механизм с двумя степенями свободы (рис. 26). Движение точки  $A$  задано:  $v_{Ax}=0$ ,  $v_{Ay}=v \sin(pt+\alpha)$ .

Дано:  $AB=r_1=0,93$  м;  $CB=BD=r_2=0,67$  м;  $BE=r_3=0,87$  м;  $OE=r_4=0,67$  м;  $\tau=1,68$  с;  $p=3,74$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi_1(0)=0,53$  рад;  $\varphi_2(0)=1,97$  рад;  $\varphi_3(0)=5,87$  рад;  $\varphi_4(0)=1,97$  рад;  $v=1,29$  м/с;  $\alpha=0,07$  рад;  $\Delta t=0,07$  с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. 2. Решить с помощью ЭВМ полученную систему уравнений на интервале времени  $\tau$ . 3. Построить графики  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\omega_{4z}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_4(t)$ . 4. Для момента времени  $t=8\Delta t=0,56$  с определить графоаналитическим методом угловые скорости звеньев и сравнить с результатами счета на ЭВМ.

**Составление уравнений движения.** Составим уравнения для четырех неизвестных угловых скоростей звеньев  $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$ . При заданном движении точки  $A$  они даются четырьмя уравнениями внешних связей, налагаемых на механизм (рис. 26)

$$v_{Cx} = 0, v_{Dy} = 0, v_{Ox} = 0, v_{Oy} = 0. \quad (2)$$

При вычислении скорости точки  $C$  последовательно находим скорости точек в соответствии с графом  $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C$ , при вычислении скорости точки  $D$  — в соответствии с графом  $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} D$ , при вычислении скорости точки  $O$  — в соответствии с графом  $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} O$ . Тогда

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC}; \quad (3)$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BD}; \quad (4)$$

$$\bar{v}_O = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BE} + \bar{\omega}_4 \times \overline{EO}. \quad (5)$$

Проецируя обе части уравнения (3) на ось  $x$ , уравнение (4) — на ось  $y$ , (5) — на оси  $x$  и  $y$ , получим с учетом (2) систему алгебраических уравнений для определения  $\omega_{iz}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ):

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 = 0;$$

$$v_{Ay} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos (\varphi_2 + \pi) = 0;$$

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 - \omega_{4z} r_4 \sin \varphi_4 = 0;$$

$$v_{Ay} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 + \omega_{4z} r_4 \cos \varphi_4 = 0. \quad (6)$$

Разрешим систему (6) относительно  $\omega_{iz}$ :

$$\omega_{1z} = -v_{Ay} \sin \varphi_2 / [r_1 \sin (\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 / (r_2 \sin \varphi_2);$$

$$\omega_{3z} = [v_{Ay} \sin \varphi_4 - \omega_{1z} r_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_4)] / [r_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_4)];$$

$$\omega_{4z} = -(\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3) / (r_4 \sin \varphi_4). \quad (7)$$

Дополним (7) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой при заданных начальных значениях  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$  решает задачу о движении механизма при заданном программном движении точки  $A$ .

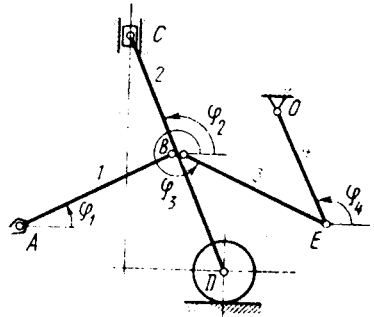


Рис. 26

```

DIMENSION F(4),DF(4),
*PRMT(5),AUX(8,4)
EXTERNAL FCT,OUTP
DATA PRMT,F,DF,NDIM/
*0.,1.68,0.07,0.01,0.,0.53,
*1.97,5.87,1.97,4*0.25,4/
CALL RK6S(PMRT,F,DF,NDIM
*,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE OUTP(T,F,DF,
*IHLF,NDIM,PRMT)
DIMENSION F(4),DF(4),PRMT(5)
PRINT 30731,T,F,DF
30731 FORMAT(10G10.3)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FCT(T,F,DF)
DIMENSION F(4),DF(4)
VAY=1.29*SIN(3.74*T+0.07)
S2=SIN(F(2))
S4=SIN(F(4))
OM1=-VAY*62/0.93/SIN(F(1)+F(2))
OM2=-1.39*OM1*SIN(F(1))/S2
OM3=(VAY*S4/0.87-1.07*OM1+
*SIN(F(1)-F(4)))/SIN(F(3)-F(4))
OM4=(OM2*S2-OM3*I.3*SIN(F(3)))/S4
DF(1)=OM1
DF(2)=OM2
DF(3)=OM3
DF(4)=OM4
RETURN
END

```

0.0	0.530	1.97	5.87	1.97	-0.149	0.114	0.092	0.161
0.07	0.501	1.99	5.89	2.00	-0.682	0.499	0.427	0.736
0.140	0.437	2.04	5.93	2.07	-1.12	0.736	0.708	1.11
0.210	0.347	2.09	5.98	2.15	-1.40	0.766	0.825	1.17
0.280	0.244	2.14	6.04	2.23	-1.53	0.609	0.710	0.928
0.350	0.137	2.17	6.08	2.28	-1.52	0.349	0.425	0.525
0.420	0.034	2.19	6.10	2.30	-1.42	0.001	0.101	0.121
0.490	-0.061	2.19	6.09	2.30	-1.26	-0.130	-0.157	-0.193
0.560	-0.142	2.17	6.08	2.28	-1.06	-0.252	-0.303	-0.378
.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.61	0.521	1.98	5.88	1.98	0.41	-0.305	-0.250	-0.446
1.68	0.530	1.97	5.87	1.97	-0.15	0.114	0.091	0.166

Рис. 27

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Уравнения (7), (8) интегрируются на ЭВМ методом Рунге—Кутта. Один из возможных вариантов программы с использованием стандартной процедуры RKGS библиотеки программ ЕС ЭВМ приведен на рис. 27.

Обозначение переменных в программе:

Переменные ... $t$	$\varphi_i$	$\dot{\varphi}_i$	$\omega_{1z}$	$\omega_{2z}$	$\omega_{3z}$	$\omega_{4z}$
Обозначения ... T	F(I)	DF(I)	OM1	OM2	OM3	OM4

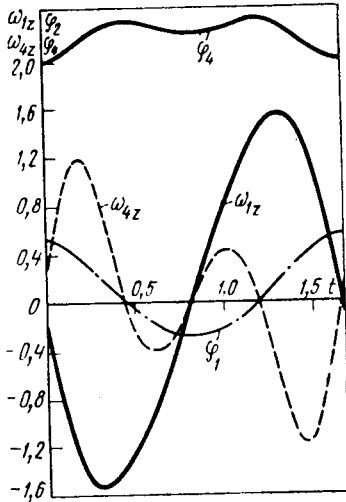


Рис. 28

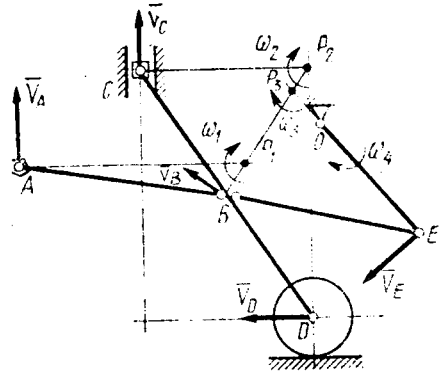


Рис. 29

Имена подпрограмм, параметров, массивов параметров, необходимых для обращения к RKGS, обозначены, как в [9].

На печать выводятся переменные  $t$ ,  $\varphi_i$ ,  $\dot{\varphi}_i$  с шагом  $\Delta t = \tau/24 = = 0,07$  с.

По результатам счета (см. рис. 27) на рис. 28 построены графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\omega_{4z}(t)$ ,  $\varphi_4(t)$ .

**Контроль решения.** Графики на рис. 28 не имеют разрывов. Значения переменных при  $t=0$  и  $t=\tau$  совпадают с хорошей точностью, что соответствует периодическому характеру движения механизма при заданном гармоническом законе движения точки A.

Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения углов поворота звеньев, соответствующих моменту времени  $t=0,56$  с (девятая строка):

$$\varphi_1 = -0,142 \text{ рад} = -8^\circ; \quad \varphi_2 = 2,17 \text{ рад} = 124^\circ;$$

$$\varphi_3 = 6,08 \text{ рад} = 348^\circ; \quad \varphi_4 = 2,28 \text{ рад} = 131^\circ.$$



Это положение механизма изображено в масштабе 1 : 10 на рис. 29. Построим мгновенные центры скоростей  $P_1, P_2, P_3$  первого, второго и третьего звеньев. Построим векторы скоростей точек  $A, B, C, D, E$ , укажем дужками направление вращения звеньев и вычислим их угловые скорости:

$$\omega_1 = v_A/AP_1 = 1,29 \sin (3,74 \cdot 0,56 + 0,07)/1,01 = 1,06 \text{ рад/с};$$

$$\omega_2 = v_B/BP_2 = \omega_1 BP_1/BP_2 = 1,06 \cdot 0,16/0,67 = 0,253 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_C/BP_3 = \omega_1 BP_1/BP_3 = 1,06 \cdot 0,16/0,55 = 0,308 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = v_E.EO = \omega_3 P_3 E/EO = 0,308 \cdot 0,85/0,67 = 0,391 \text{ рад/с}.$$

Полученные результаты соответствуют результатам счета, приведенным в девятой строке таблицы распечатки (рис. 29).

## Кинематика управления манипулятором

### РАСЧЕТ К-3

**Описание задания.** Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики управляемого движения манипулятора.

Рассматриваемый манипулятор является плоским механизмом с двумя степенями свободы. Следовательно, его захвату, точке  $M$ , разрешается произвольное движение в плоскости по двум координатам. Управление должно совместить захват с двигающейся деталью, точкой  $D$ . Варианты кинематических схем манипуляторов представлены на рис. 30—33. Деталь  $D$  движется с постоянной скоростью  $v_D$  в указанном на рисунках направлении. Координаты точки  $D$  изменяются по закону

$$x_D = x_D(0) + v_{Dx}t, \quad y_D = y_D(0) + v_{Dy}t. \quad (1)$$

Управление движением захвата  $M$  осуществляется по линейной комбинации рассогласований координат точек  $D$  и  $M$ , а также их производных. Рассогласование координат точек  $D$  и  $M$  в момент времени  $t = \tau$  должно составлять величину  $\delta$  от начальных рассогласований.

Исходные данные определяются по формулам (2) и табл. 5:

$$r_i = r_{i\tau} + 0,001n, \quad r_i = r_{i\tau} + 0,001N; \quad (R_i \text{ на рис. 30—33});$$

$$\varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01n, \quad \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N \quad (i = 2, 3);$$

$$v_D = v_{D\tau} - 0,003N, \quad \tau = 1, 2(1 + 0,02N). \quad (2)$$

Требуется: 1. Выбрать управление, решающее поставленную задачу. 2. Исследовать движение манипулятора при выбранном управлении. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к составлению уравнений движения.** Предполагается, что координаты захвата  $M$  ( $x_M, y_M$ ) в процессе движения извест-

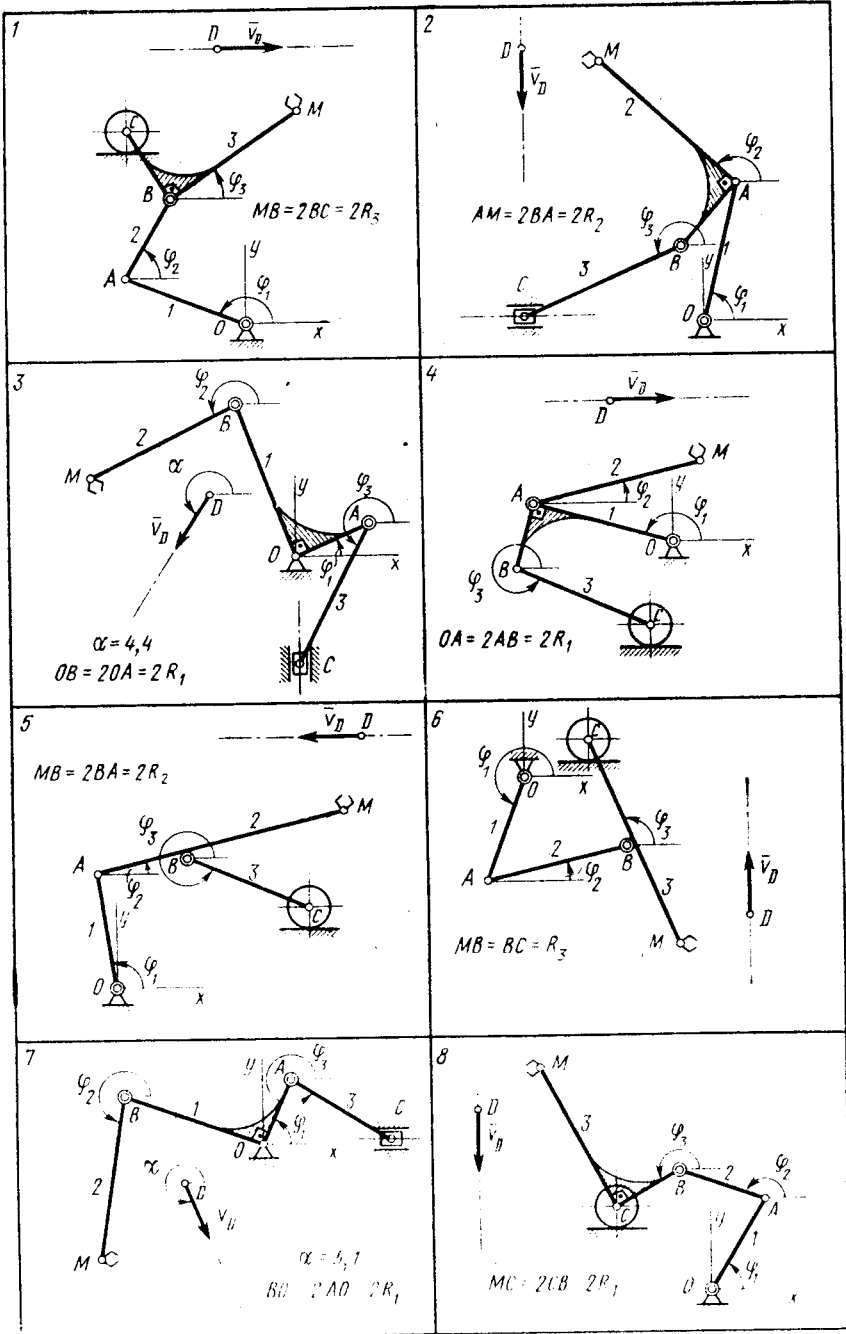


Рис. 30

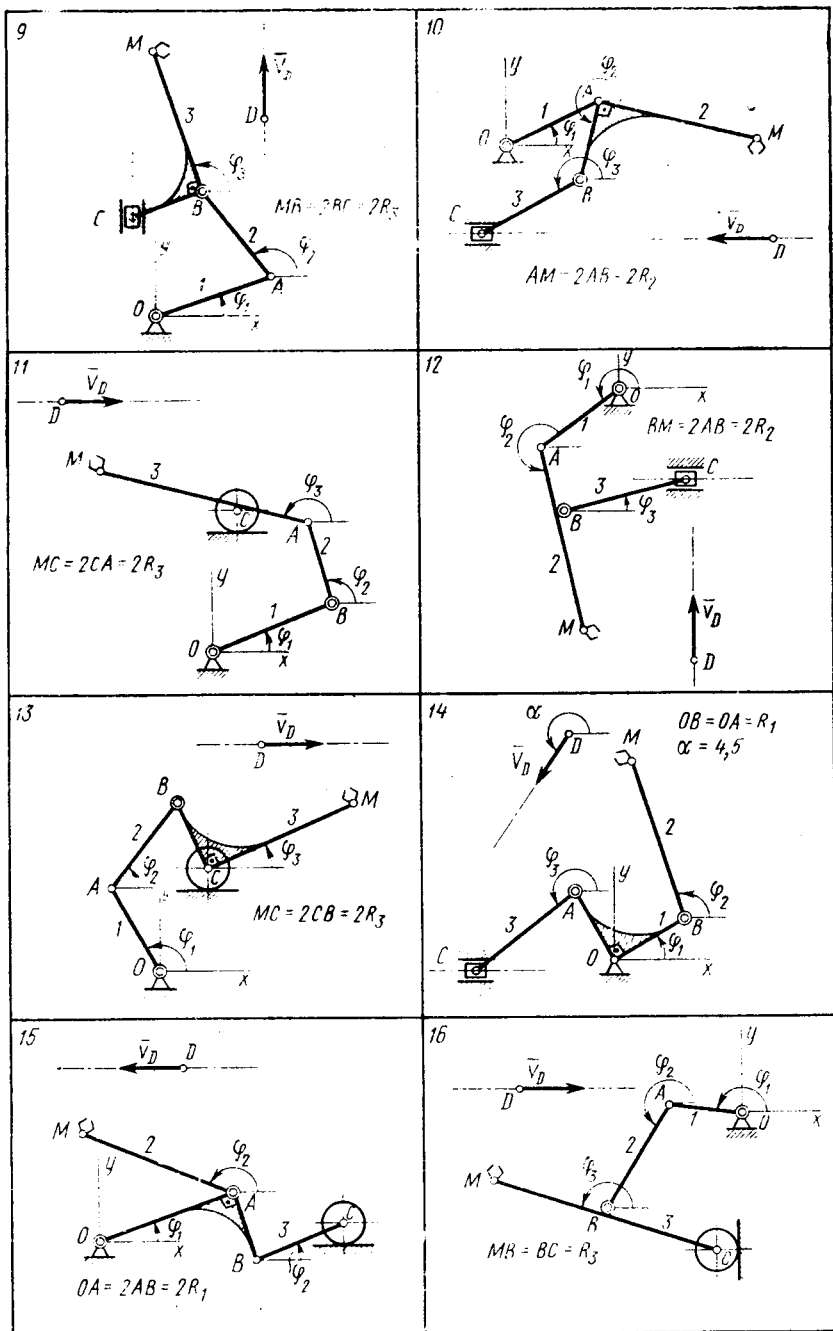


Рис. 31

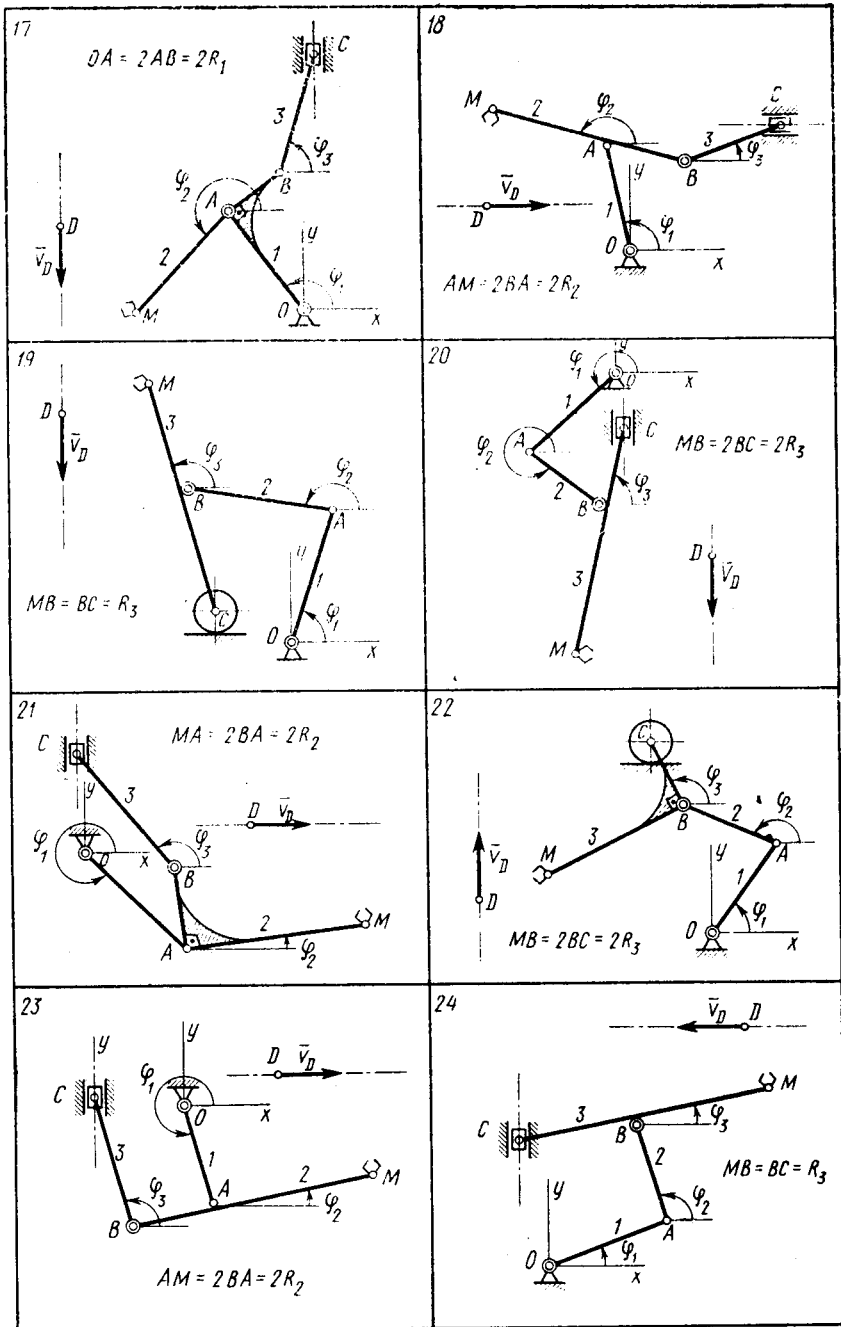


Рис. 32

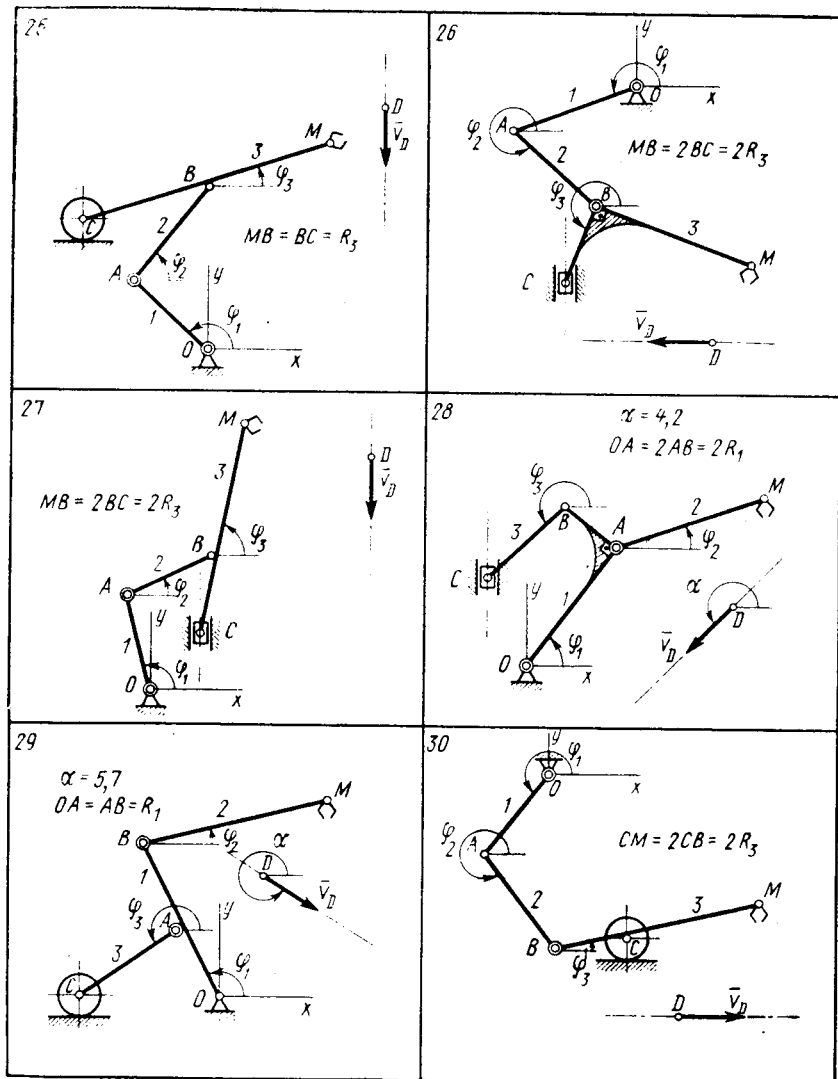


Рис. 33

ны, например за счет прямых измерений; координаты детали  $D$  ( $x_D, y_D$ ) заданы уравнениями (1). Тогда можно вычислить рассогласования:

$$\Delta x = x_D - x_M; \quad \Delta y = y_D - y_M. \quad (3)$$

Управление движением захвата осуществляется по сигналам управления  $u_x, u_y$ , образованным линейной комбинацией рассогласований и их производных:

$$u_x = \Delta x + T^* \frac{d}{dt} \Delta x; \quad u_y = \Delta y + T^* \frac{d}{dt} \Delta y. \quad (4)$$

Вариант	$r_{1r}$	$r_{2r}$	$r_{3r}$	$z_{1r}$	$z_{2r}$	$z_{3r}$	$v_{Dr}$	$x_D(0)$	$y_D(0)$	$\delta$
1	0,82	0,68	0,46	2,9	1,1	0,5	0,508	-0,15	1,85	0,011
2	0,81	0,47	0,91	1,3	2,2	3,6	0,308	-0,94	1,71	0,012
3	0,43	0,91	0,84	0,3	3,8	4,2	0,512	-0,42	0,25	0,013
4	0,42	0,97	0,88	2,8	0,2	5,7	0,462	-0,21	1,22	0,014
5	0,78	0,45	0,91	1,7	0,1	5,8	0,385	1,35	1,51	0,015
6	0,71	0,89	0,76	4,6	0,1	1,6	0,312	1,33	-1,20	0,016
7	0,46	0,97	0,74	1,3	4,3	5,6	0,421	-0,61	-0,24	0,017
8	0,81	0,72	0,48	1,1	3,0	3,3	0,472	-1,38	1,61	0,018
9	0,76	0,79	0,45	0,3	2,4	1,8	0,465	0,54	1,02	0,019
10	0,72	0,49	0,78	0,5	4,2	3,6	0,375	1,61	-0,55	0,020
11	0,83	0,57	0,49	0,5	1,6	3,0	0,525	-0,92	1,78	0,021
12	0,68	0,46	0,83	3,9	4,9	0,3	0,310	0,46	-2,04	0,022
13	0,78	0,85	0,49	2,1	1,0	0,1	0,460	0,51	1,65	0,023
14	0,48	0,97	0,73	0,3	1,8	3,7	0,402	-0,26	1,30	0,024
15	0,42	0,97	0,78	0,3	2,9	0,4	0,455	0,45	1,12	0,025
16	0,51	0,82	0,79	3,2	4,1	3,0	0,288	-1,57	0,13	0,026
17	0,41	0,83	0,98	2,0	4,3	1,4	0,451	-1,18	0,56	0,027
18	0,82	0,45	0,78	1,6	2,9	0,4	0,312	-0,99	0,52	0,028
19	0,92	0,98	0,81	1,5	2,7	1,7	0,294	-1,43	1,95	0,029
20	0,79	0,68	0,48	4,1	5,8	1,1	0,306	0,41	-1,43	0,030
21	0,76	0,42	0,85	5,2	0,4	2,3	0,380	0,84	0,26	0,031
22	0,75	0,78	0,47	1,1	2,8	2,0	0,515	-1,66	0,42	0,032
23	0,71	0,49	0,82	4,9	0,1	1,9	0,385	0,62	0,12	0,033
24	0,75	0,65	0,78	0,3	1,9	0,1	0,398	1,11	1,32	0,034
25	0,68	0,79	0,82	2,3	0,7	0,5	0,392	1,40	1,67	0,035
26	0,81	0,72	0,49	3,7	5,4	4,2	0,371	0,43	-1,98	0,036
27	0,78	0,65	0,48	1,6	0,1	1,5	0,275	1,31	1,62	0,037
28	0,45	0,97	0,78	0,9	0,5	3,9	0,290	1,22	0,78	0,038
29	0,49	0,98	0,77	2,1	0,4	3,7	0,305	0,21	0,72	0,039
30	0,72	0,75	0,49	3,9	5,4	0,3	0,340	1,14	-1,25	0,040

Здесь  $T^*$  — множитель размерности времени, который будет выбран далее.

Сигналы (4) подаются на управление двигателями манипулятора с коэффициентом усиления  $k$

$$ku_x; ku_y. \quad (5)$$

В современных высокоточных манипуляторах коэффициенты усиления  $k$  очень велики. Поэтому в (5) можно считать  $k \rightarrow \infty$ , величины  $ku_x, ku_y$  остаются конечными, обеспечивающими требуемое движение манипулятора, а следовательно,  $u_x, u_y \rightarrow 0$ .

Приближенные предельные уравнения

$$u_x = 0; u_y = 0 \quad (6)$$

описывают движение манипулятора с погрешностью порядка  $1/k$ .

Из (3), (4), (6) получим эти уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_M}{dt} &= v_{Dx} + \frac{1}{T^*} (x_D - x_M); \\ \frac{dy_M}{dt} &= v_{Dy} + \frac{1}{T^*} (y_D - y_M). \end{aligned} \quad (7)$$

Манипулятор является механической системой с двумя степенями свободы, поэтому движение по двум координатам  $x_M, y_M$ , найденное по (7), однозначно определяет движение всех его звеньев. Кинематические уравнения, описывающие изменение углов поворота и угловых скоростей звеньев, составляются по методике, приведенной в расчете К-1.

**Указания к выбору коэффициента управления  $T^*$ .** Запишем уравнения (4), (6) в рассогласованиях  $\Delta x, \Delta y$ :

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0; \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0.$$

Решение этих уравнений однотипно:

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-\frac{t}{T^*}}; \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-\frac{t}{T^*}}. \quad (8)$$

По условию, к концу интервала времени  $\tau$  рассогласования  $\Delta x, \Delta y$  должны составлять величину  $\delta$  от начальных рассогласований.

Из (8) имеем  $\delta = \Delta x / \Delta x(0) = e^{-\frac{\tau}{T^*}}$ , откуда  $T^* = -\tau / \ln \delta$ .

**Указания к выбору начальных условий.** Если систему уравнений (7) и кинематических уравнений движения звеньев привести к форме Коши, то она будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= v_{Mx}(x_M, t), \quad \dot{y}_M = v_{My}(y_M, t); \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_{iz}(\varphi_i, v_{Mx}, v_{My}, t) \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения манипулятора, являющегося системой с двумя степенями свободы, записаны в избыточном наборе пяти переменных  $x_M, y_M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Отсюда следует, что из начальных значений этих переменных независимо могут задаваться только два. В табл. 5 независимыми задаются величины  $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ , значения  $\varphi_3(0)$ , указанные в таблице, вычислены по  $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$  для рассматриваемой конструктивной схемы манипулятора. Значения  $x_M(0), y_M(0)$  следует найти самостоятельно по заданным  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$ .

**Примечание.** Следует заметить, что движение механической системы описывается системой динамических уравнений, порядок которой вдвое превышает число степеней свободы. Чтобы определить решение динамических уравнений, требуется независимо задать начальные условия не только по положению, но и по скоростям. Однако уравнения (7) однозначно связывают скорости и координаты, что препятствует их независимому заданию. Выход из противоречия состоит в том, что уравнения (6), а значит, и (7) можно рассматривать лишь за пределами малого начального интервала времени, так называемого пограничного слоя [4]. За время пограничного слоя сигналы  $u_x, u_y$  системой управления должны сводиться от конечных по величине значений до значений, близких к нулю. А это и означает, что движение за пределами пограничного слоя с погрешностью  $1/k$  описывается кинематическими уравнениями (7).

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Дифференциальные уравнения движения манипулятора с заданными начальными условиями интегрируются с помощью ЭВМ на интервале времени  $\tau$ . На печать выводятся переменные  $t, x_M, y_M, v_{Mx}, v_{My}, \varphi_i, \omega_{iz}, v_c$  с ша-

гом  $\Delta t = \tau/24 = 0,05 + 0,001 N$ . Вариант программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, обладающим опытом программирования, рекомендуется использовать самостоятельные варианты программы с обращением к стандартным подпрограммам.

**Контроль решения.** Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. При  $t = \tau$  рассогласование между точками  $M$  и  $D$  должно быть величиной порядка  $\delta$  от начального. Результаты вычисления на ЭВМ для момента времени  $t = (N+1) \times \Delta t$  угловых скоростей звеньев и скорости точки  $C$  должны близко совпадать с результатами графоаналитического решения для этого момента времени, как в расчете К-1.

**Защита расчета.** Студенту могут быть заданы такие же вопросы, как при защите расчета К-1, а также вопросы типа:

1. Как изменится решение задачи, если точка  $D$  будет двигаться по произвольно заданной кривой?

2. Почему множитель  $T^*$  в (4) имеет размерность времени?

3. Как следует выбирать величину  $T^*$  при изменении требований на точность сближения точек  $M$  и  $D$ ?

4. Составить уравнения, аналогичные (7), если управление осуществляется по методу «преследования»: постоянный по модулю вектор  $\vec{r}_M$  во все время движения направлен на точку  $D$  [1].

#### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Управление манипулятором (рис. 34) должно обеспечить за время  $\tau$  сближение захвата  $M$  с движущейся деталью  $D$ . Деталь движется прямолинейно с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в указанном на рисунке направлении. Начальное положение манипулятора задано углами поворота звеньев  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$ . К моменту времени  $t = \tau$  требуется относительная точность  $\delta$  совмещения точек  $M$  и  $D$ .

Управление манипулятором осуществляется по линейной комбинации рассогласований и их производных.

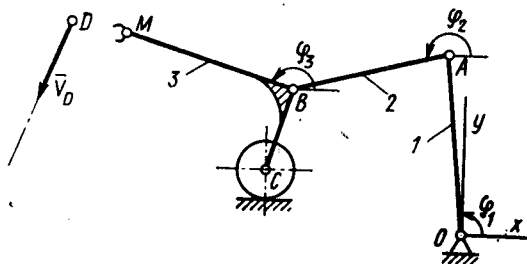


Рис. 34

Числовые значения исходных данных:  $v_D = 0,304$  м/с;  $\alpha = 4,35$  рад;  $OA = r_1 = 0,953$  м;  $BC = r_3 = 0,457$  м;  $BM = 2r_3$ ;  $AB = r_2 = 0,847$  м;  $\varphi_1(0) = 1,63$  рад;  $\varphi_2(0) = 3,37$  рад;  $\varphi_3(0) = 2,87$  рад;  $x_D(0) = -2,16$  м;  $y_D(0) = 1,18$  м;  $\delta = 0,01$ ;  $\tau = 1,37$  с;  $\Delta t = 0,057$  с.

Здесь  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и вектором  $\vec{v}_D$ .



Требуется: 1. Составить уравнения управляемого движения точки  $M$ , уравнения углового движения звеньев манипулятора и уравнение для скорости точки  $C$ . 2. Выбрать параметры управления, обеспечивающего сближение точек  $M$  и  $D$  с заданной точностью. 3. Проинтегрировать с помощью ЭВМ уравнения движения на интервале времени  $t$ . 4. Построить траектории сближения точек  $M$  и  $D$  и графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $v_{Cx}(t)$ . 5. Для момента времени  $t = (N+1)\Delta t = 0,456$  с провести графоаналитическое решение задачи и сравнить с результатами счета на ЭВМ.

**Составление уравнений движения.** Уравнения движения детали  $D$  имеют вид

$$\begin{aligned}x_D &= x_D(0) + v_{Dx}t; & v_{Dx} &= v_D \cos \alpha = -0,108 \text{ м/с}; \\y_D &= y_D(0) + v_{Dy}t; & v_{Dy} &= v_D \sin \alpha = -0,284 \text{ м/с}.\end{aligned}\quad (10)$$

Предположим, что координаты захвата  $M$  известны в процессе движения. Тогда можно вычислить рассогласования координат точек  $D$  и  $M$ :

$$\Delta x = x_D - x_M; \quad \Delta y = y_D - y_M. \quad (11)$$

Пусть управление манипулятором осуществляется по линейной комбинации рассогласований и их производных:

$$u_x = \Delta x + T^* \frac{d}{dt} \Delta x; \quad u_y = \Delta y + T^* \frac{d}{dt} \Delta y. \quad (12)$$

При управлении с большими коэффициентами усиления  $k$  с погрешностью порядка  $1/k$  выполняются соотношения

$$u_x = 0; \quad u_y = 0. \quad (13)$$

Подставим в (13) выражения (10)–(12) и приведем полученные уравнения к форме Коши. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dx_M}{dt} &= v_{Mx}; & v_{Mx} &= v_{Dx} + [x_D(0) + v_{Dx}t - x_M]T^*; \\ \frac{dy_M}{dt} &= v_{My}; & v_{My} &= v_{Dy} + [y_D(0) + v_{Dy}t - y_M]T^*.\end{aligned}\quad (14)$$

Угловое движение звеньев манипулятора и скорость точки  $C$  однозначно определяются движением точки  $M$  и внешними связями, налагаемыми в точках  $O$  и  $C$ . Составим выражения для проекций скоростей точек  $C$  и  $M$ .

В соответствии с графом  $C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{3} M$  запишем:

$$\begin{aligned}v_{Mx} &= v_{Cx} - \omega_{3z}r_3 \sin\left(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) - \omega_{3z}2r_3 \sin \varphi_3; \\ v_{My} &= \omega_{3z}r_3 \cos\left(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) + \omega_{3z}2r_3 \cos \varphi_3.\end{aligned}\quad (15)$$

В соответствии с графом  $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} C$

$$v_{Cx} = -\omega_{1z}r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}r_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z}r_3 \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$v_{Cy} = \omega_{1z}r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}r_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}r_3 \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) получим:

$$\omega_{3z} = v_{My} [r_3 (2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_3)];$$

$$v_{Cx} = v_{Mx} + \omega_{3z}r_3 (2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_3);$$

$$\omega_{1z} = (v_{Cx} \cos \varphi_2 + \omega_{3z}r_3 \cos (\varphi_3 - \varphi_2)) / [r_1 \sin (\varphi_2 - \varphi_1)];$$

$$\omega_{2z} = (\omega_{3z}r_3 \sin \varphi_3 - \omega_{1z}r_1 \cos \varphi_1) / (r_2 \cos \varphi_2). \quad (17)$$

Уравнения (17) дополним дифференциальными соотношениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (18)$$

**Определение параметра управления  $T^*$ .** Из (12), (13) получим уравнения в рассогласованиях:

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0; \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0.$$

Решение этих уравнений:

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-\frac{t}{T^*}}; \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-\frac{t}{T^*}}.$$

По условию, при  $t = \tau$  должно выполняться соотношение  $\delta = \Delta x / \Delta x(0) = \Delta y / \Delta y(0) = 0.01$ . Отсюда  $T^* = -\tau / \ln \delta = -1,37 / \ln 0,01 = 0,297$  с.

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Систему уравнений (14), (17), (18) интегрируем с помощью ЭВМ на интервале времени  $\tau = 1,37$  с, используя конечно-разностную схему Эйлера. Шаг интегрирования примем равным шагу печати  $\Delta t = 0,057$  с.

Начальные условия по переменным  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  приведены в исходных данных, а по переменным  $x_M, y_M$  вычисляются по формулам (рис. 34).

$$x_M = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + 2r_3 \cos \varphi_3;$$

$$y_M = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + 2r_3 \sin \varphi_3. \quad (19)$$

Подставив в (19) числовые значения  $r_i, \varphi_i(0)$ , получим  $x_M(0) = -1,76$  м,  $y_M(0) = 1$  м.

Программа счета представлена на рис. 35.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные	$t$	$\Delta t$	$x$	$y$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\omega_{1z}$	$\omega_{2z}$	$\omega_{3z}$	$v_{Mx}$	$v_{My}$	$v_{Cx}$
Обозначения	T	DT	X	Y	F1	F2	F3	OM1	OM2	OM3	VX	VY	VC

```

DATA DT,T,X,Y,F1,F2,F3/
*0.057,0.,-1.76,1.,1.63,3.37,2.87/
DO 12 K=1,25
VX=-0.108-(2.16+0.108*T*X)/0.297
VY=-0.284*(1.18-0.284*T*Y)/0.297
OM3=VY/(SIN(F3)+2*COS(F3))/0.457
RO=0.457*OM3
VC=VX+RO*(2*SIN(F3)-COS(F3))
OM1=(VC*COS(F3))+
+RO*COS(F3-F2))/SIN(F2-F1)/0.953
OM2=(RO-SIN(F3)-
-0.951*OM1*COS(F1))/COS(F2)/0.847
PRINT-30731 T
;X,Y,VX,VY,F1,F2,F3,OM1,OM2,OM3,VC

```

30731 FORMAT(8G10.3/4F8.3)

```

X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
F3=F3+OM3*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	-1.76	1.00	-1.45	0.322	1.63	3.37	2.87	1.609	-0.047	-0.425	-1.746
0.057	-1.84	1.02	-1.20	0.206	1.72	3.37	2.85	1.285	-0.178	-0.278	-1.392
0.114	-1.91	1.03	-0.97	0.112	1.79	3.36	2.83	1.032	-0.238	-0.153	-1.097
0.171	-1.97	1.04	-0.819	0.036	1.85	3.34	2.82	0.833	-0.258	-0.049	-0.854
0.228	-2.01	1.04	-0.682	-0.026	1.90	3.33	2.82	0.675	-0.257	0.035	-0.657
0.285	-2.05	1.04	-0.572	-0.075	1.94	3.31	2.82	0.549	-0.244	0.104	-0.497
0.342	-2.09	1.03	-0.483	-0.115	1.97	3.30	2.83	0.449	-0.226	0.158	-0.369
0.399	-2.11	1.02	-0.411	-0.148	2.00	3.29	2.84	0.369	-0.206	0.201	-0.268
0.456	-2.14	1.02	-0.353	-0.174	2.02	3.28	2.85	0.306	-0.187	0.234	-0.188
1.31	-2.30	0.806	-0.118	-0.279	2.15	3.18	3.11	0.132	-0.088	0.312	0.035
1.37	-2.31	0.790	-0.116	-0.280	2.16	3.17	3.12	0.137	-0.089	0.310	0.031

Рис. 35

Начальные значения переменных  $t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  вводятся с помощью оператора DATA. Длины звеньев  $r_i$ , начальные значения координат  $x_D(0), y_D(0)$ , скорости  $v_{Dx}, v_{Dy}$ , параметр управления  $T^*$  вводятся как числовые константы. На печать выводятся переменные  $t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, v_{Mx}, v_{My}, v_{Cx}$  (рис. 35).

По результатам счета на рис. 36 построены графики  $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t), v_{Cx}(t)$  и траектории сближения точек  $M$  и  $D$ .

**Контроль решения.** Графики  $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t), v_{Cx}(t)$  разрывов не имеют. В момент времени  $t$  координаты точек  $M$  и  $D$  достаточно близки. Приведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, v_{Mx}, v_{My}$ , соответствующие моменту времени  $t=0,456$  (девятая строка таблицы счета):

$$\varphi_1 = 2,02 \text{ рад} = 116^\circ, \quad \varphi_2 = 3,28 \text{ рад} = 188^\circ,$$

$$\varphi_3 = 2,85 \text{ рад} = 163^\circ, \quad v_{Mx} = -0,353 \text{ м/с}, \quad v_{My} = -0,174 \text{ м/с}.$$

Это положение механизма изобразим на рис. 37 в масштабе 1:10. По проекциям построим вектор скорости точки  $M$ . Найдем мгновенные центры скоростей  $P_3, P_2$  третьего и второго звеньев. Построим векторы скоростей точек  $A, B, C$ , дужками укажем направление вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки  $C$ :

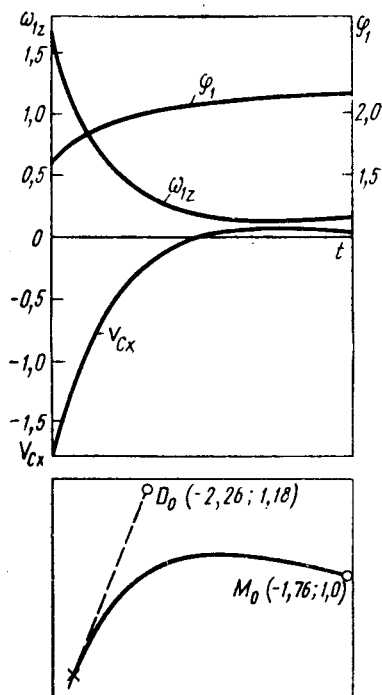


Рис. 36

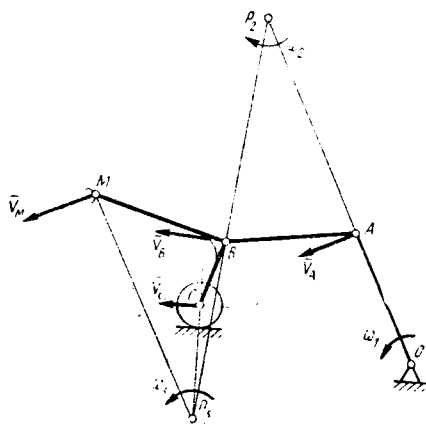


Рис. 37

$$\omega_3 = v_M / MP_3 = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} / MP_3 = 0,394 / 1,65 \approx 0,24 \text{ рад/с;}$$

$$v_C = \omega_3 P_3 C = 0,24 \cdot 0,76 \approx 0,18 \text{ м/с;}$$

$$\omega_2 = v_B / BP_2 = \omega_3 BP_3 / BP_2 = 0,24 \cdot 1,2 / 1,51 \approx 0,19 \text{ рад/с;}$$

$$\omega_1 = v_A / AO = \omega_2 P_2 A / AO = 0,19 \cdot 1,52 / 0,953 \approx 0,3 \text{ рад/с.}$$

Полученные результаты соответствуют результатам, приведенным в девятой строке таблицы счета.

## ДИНАМИКА

### Динамика материальной точки

#### РАСЧЕТ Д-1

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта построения расчетной механической модели по описанию задачи, освоение методики составления дифференциальных уравнений движения выбранной модели — материальной точки, знакомство с методами аналитического и численного исследования уравнений. Аналитически находим установившееся движение и оцениваем характерное время переходного процесса. Эти оценки используем для выбора интервала интегрирования при численном анализе уравнений. Счетом на ЭВМ определяем переходный процесс выхода системы на установившийся режим при заданных начальных условиях. Варианты заданий представлены на рис. 38—41. В описании каждого задания на рис. *а* схематически изображен исследуемый объект, на рис. *б* — его расчетная механическая модель. В качестве модели рассматривается материальная точка *М*, совершающая плоское движение. Моделью определяются силы следующего вида: сила  $\vec{F}_0$ , приводящая точку в движение или тормозящая ее, вес  $G$ , разность архимедовой силы и веса, задаваемая в вариантах 2, 10, 12, 15, 21, 25 в долях веса, силы упругости  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и силы вязкого трения  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ .

Силы упругости  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  пропорциональны с коэффициентами  $-k_1$ ,  $-k_2$  векторам деформаций соответствующих пружин модели, указанных на рисунках. В зависимости от варианта деформаций пружин задаются на рисунках векторами  $\vec{r}_{AM}$ ,  $\vec{r}_{BM}$ ,  $\vec{r}_{OM}$ . Деформируемые элементы модели безынерционные.

Силы упругости реализуются в исходной схеме рис. *а* пружинами амортизаторов, за счет поперечной и продольной упругости тросов, силами системы воздушной подвески в варианте 4, силами упругости ледовой поверхности в варианте 14, архимедовыми силами при частичном погружении тела в жидкость. Прямая  $OO_1$  на рисунках вариантов 1, 9, 14, 19, 24 указывает положения точки, для которых силы поперечной упругости обращаются в ноль.

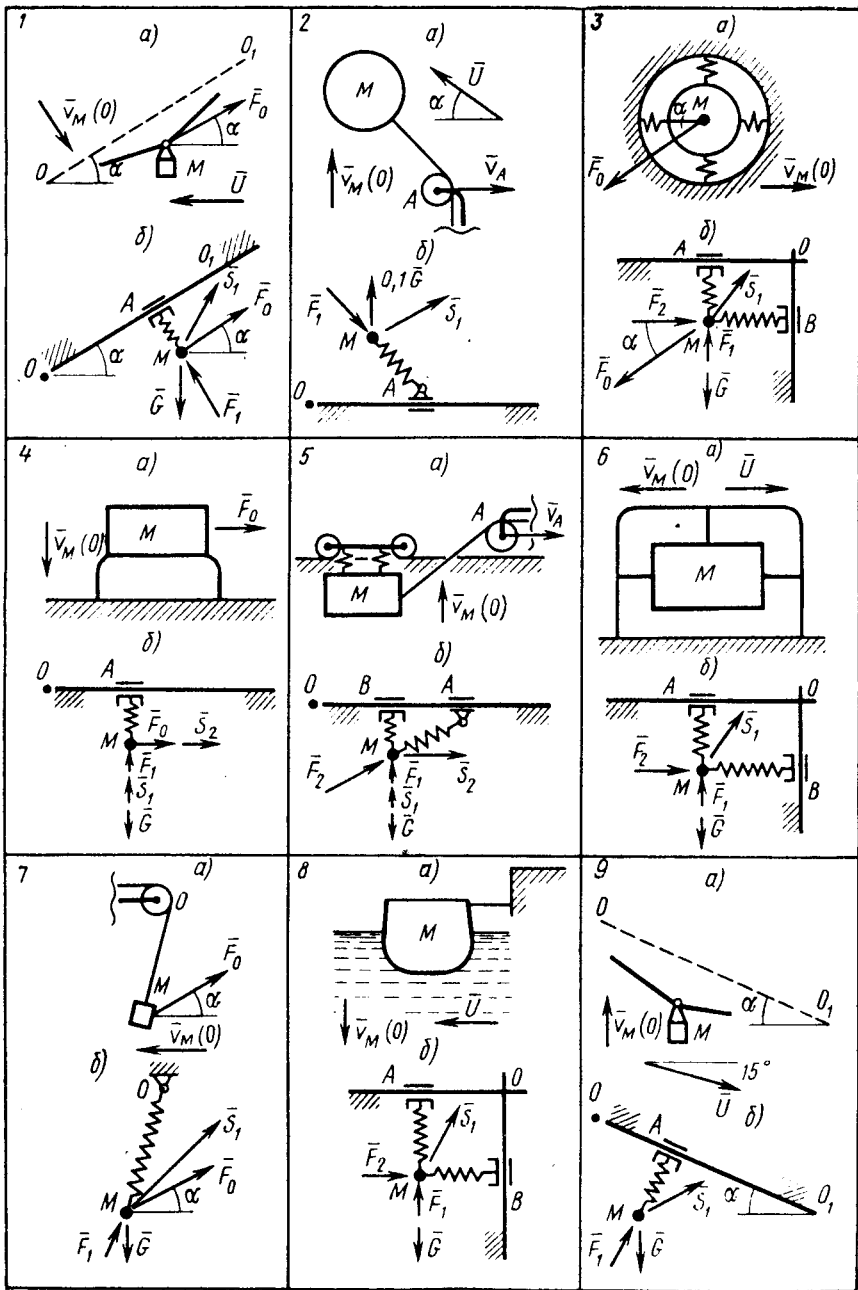


Рис. 38

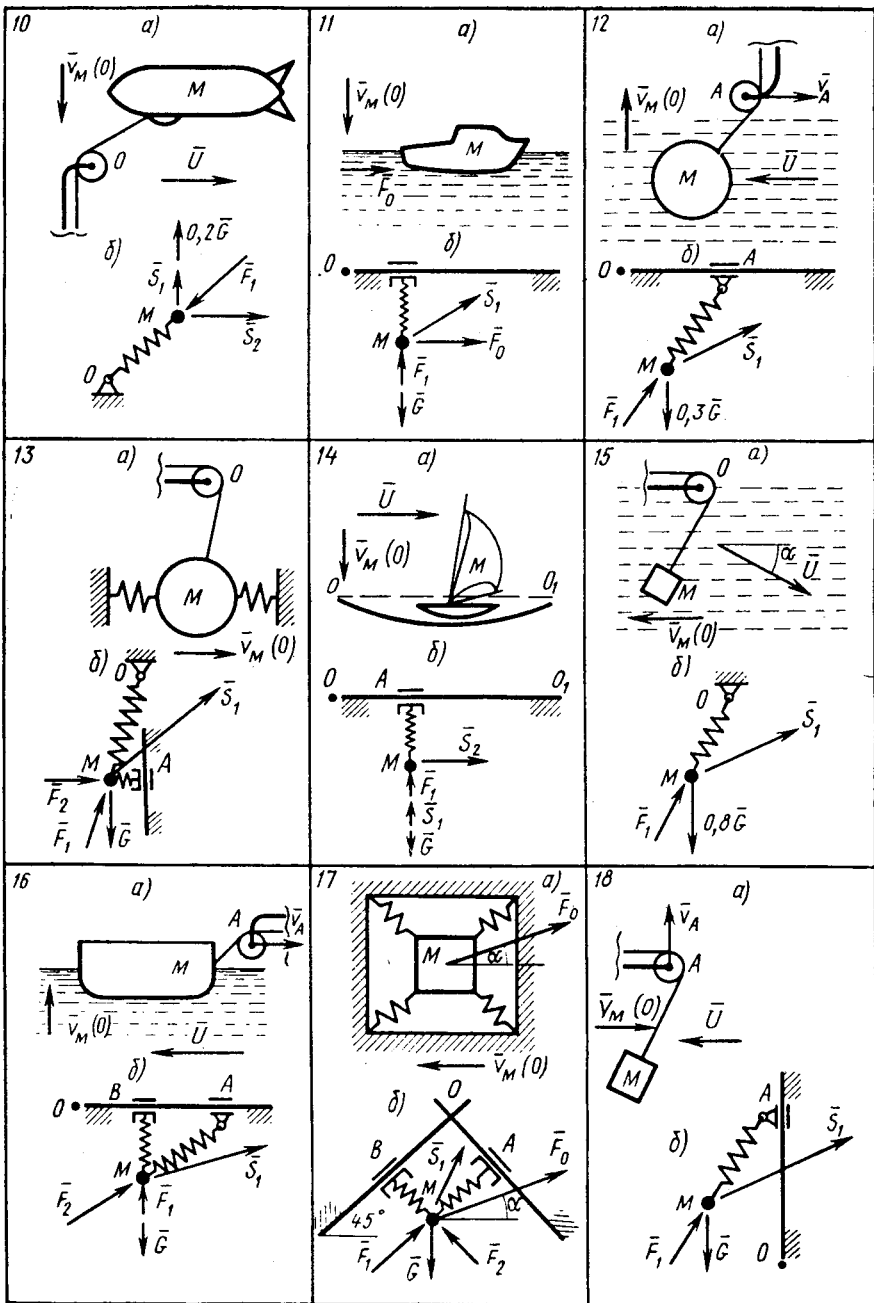


Рис. 39

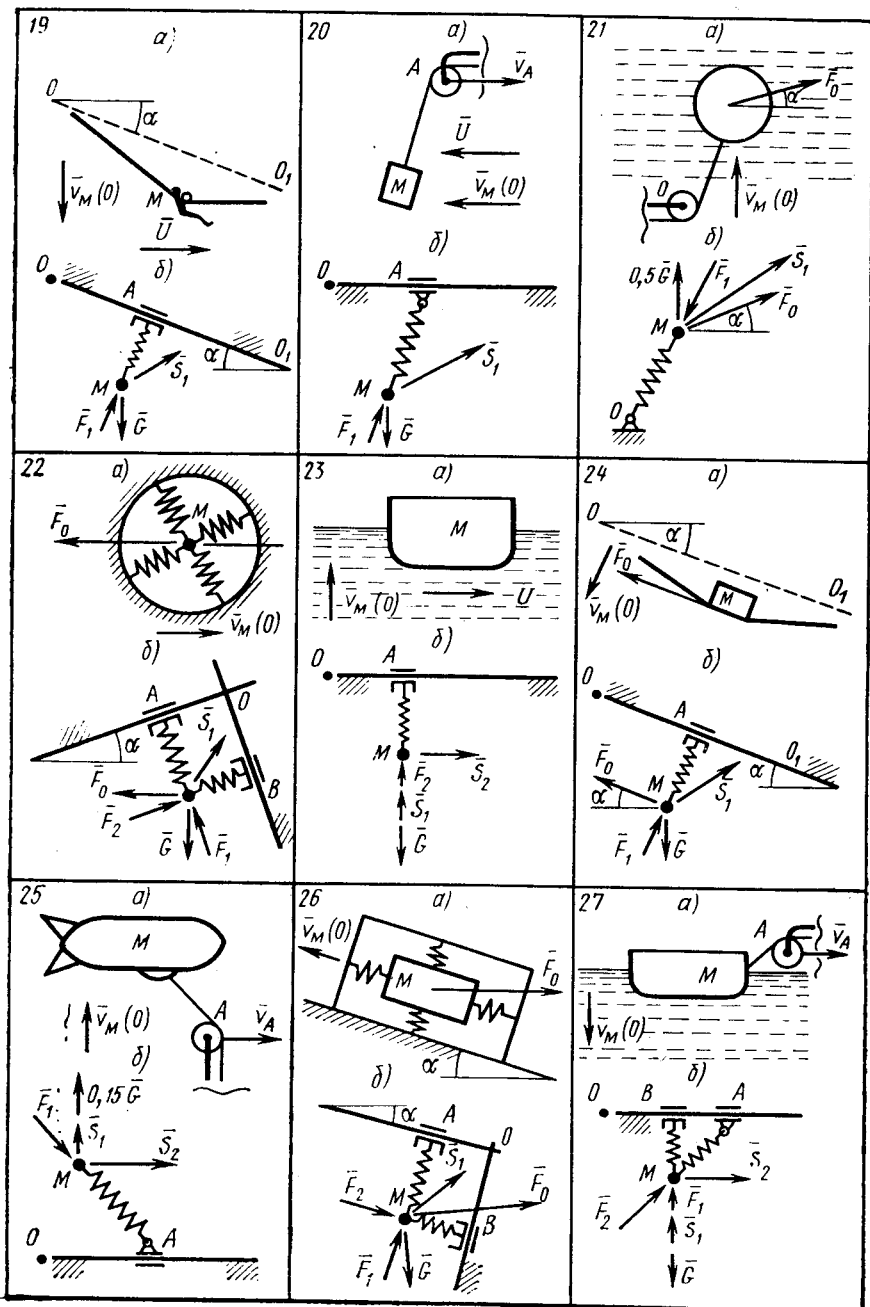


Рис. 40



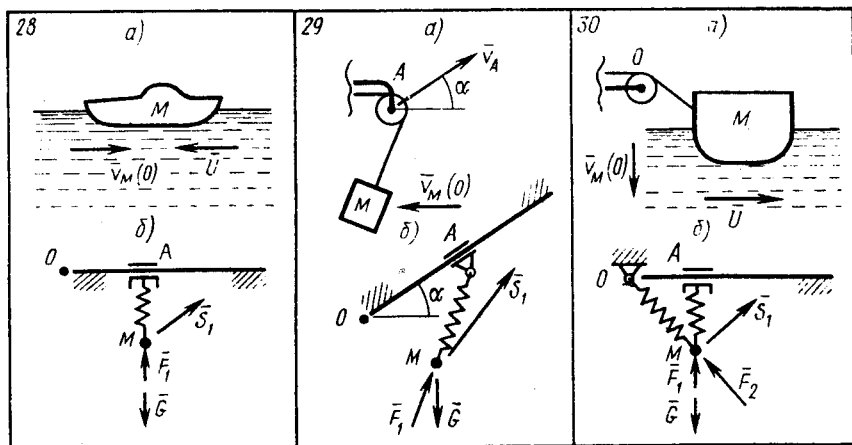


Рис. 41

В вариантах 3, 6, 8, 13, 17, 22, 26 предполагается, что перемещения точки  $M$  малы по сравнению с размерами элементов схемы на рис. а. При этом на рис. б можно принять, что направления линий действия упругих сил не зависят от деформаций.

В вариантах 2, 5, 7, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 27, 29, 30 принято упрощающее предположение о том, что вектор продольной деформации троса равен вместе с упругой силой нулю при совпадении точки  $M$  с блоком. Односторонний характер упругих сил, моделирующих продольную податливость тросов и архимедову силу, не обсуждается.

В большинстве вариантов сила вязкого трения пропорциональна с коэффициентом  $-\mu_1$  вектору скорости движения точки относительно среды. В вариантах 4, 5, 10, 14, 23, 25, 27 силы вязкого трения в вертикальном и горизонтальном направлениях пропорциональны с коэффициентами  $-\mu_1, -\mu_2$  составляющим относительной скорости по этим направлениям.

На рис. а через  $\bar{U}$  обозначен вектор скорости среды, в которой движется точка  $M$ , через  $\bar{v}_A$  обозначена скорость точки  $A$ , заданная по условию для вариантов 2, 5, 12, 16, 18, 25, 26, 27, 29. Для этих вариантов следует считать, что в начальный момент времени точка  $A$  совпадает с указанной на рисунках неподвижной точкой  $O$ . На рис. а вектор  $\bar{v}_M(0)$  указывает направление начальной скорости точки  $M$ . Его модуль дается табл. 6. Задание начального положения точки  $M$  оговорено ниже.

Числовые значения параметров определяются формулами (1) и табл. 6. Часть данных приведена на рисунках:

$$m = m_r(1 + 0,01N); \quad k_1 = k_{1r}(1 + 0,01n). \quad (1)$$

Требуется исследовать движение материальной точки. Перечень пунктов исследования оговорен ниже в примере.

Таблица 6

№ п/п	$m_T$	$k_{1T}$	$k_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\alpha^\circ$	$F_0$	$\nu_A$	$U$	$\gamma$	$\nu_M (O)$	Содержание задачи
1	$1,3 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^4$	—	$1,4 \cdot 10^3$	—	30	$6 \cdot 10^3$	—	2,5	0,15	1,8	Подъем заданной силой ваго- нетки подвесной дороги
2	$0,8 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$	—	$0,28 \cdot 10^3$	—	60	—	5	3,2	0,5	0,9	Букировка аэростата с задан- ной скоростью
3	$2,5 \cdot 10^{-4}$	150	150	$8 \cdot 10^{-2}$	—	45	$1,8 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,3	$7 \cdot 10^{-2}$	Воздействие заданной силы на чувствительную массу акселе- рометра
4	$12 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^6$	—	$1,7 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^4$	—	$4,8 \cdot 10^4$	—	—	0,17	0,7	Разгон платформы на воздуш- ной подушке заданной силой
5	$6 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	—	—	4,2	—	0,22	1,6	Букировка амортизированного груза с заданной скоростью
6	$22 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^6$	$0,45 \cdot 10^6$	$0,8 \cdot 10^5$	—	—	—	—	3	0,1	0,25	Ветровое возмущение удержи- ваемого тросами контейнера
7	$1,5 \cdot 10^2$	$1,7 \cdot 10^3$	—	$2,6 \cdot 10^2$	—	20	$2,8 \cdot 10^2$	—	—	0,13	2,2	Возмущение висящего на тросе груза заданной силой
8	$20 \cdot 10^3$	$4,3 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^6$	$4,1 \cdot 10^4$	—	—	—	—	2,6	0,31	0,23	Возмущение потоком удержи- ваемого тросом понтона
9	$5 \cdot 10^2$	$6,1 \cdot 10^3$	—	$4,3 \cdot 10^2$	—	10	—	—	3	0,14	1,8	Свободный спуск вагонетки подвесной дороги
10	$65 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^5$	—	$5,8 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$	—	—	—	5	0,24	1,7	Ветровое возмущение дрижаб- ля у причальной мачты
11	$1,5 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^3$	—	$1,6 \cdot 10^3$	—	—	$3,2 \cdot 10^3$	—	—	0,12	1,3	Разгон катера заданной силой
12	$5,5 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^4$	—	$5,3 \cdot 10^3$	—	—	—	2	3	0,33	0,6	Букировка с заданной скоро- стью подводного аппарата
13	$2,4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$8,3 \cdot 10^3$	—	—	—	—	—	0,27	0,9	Свободные колебания висящего груза с боковыми амортизато- рами
14	$3,5 \cdot 10^2$	$7,1 \cdot 10^3$	—	$1,4 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^2$	—	—	—	5	0,11	1,4	Разгон буера ветром
15	$9 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^5$	—	$1,9 \cdot 10^4$	—	30	—	—	8	0,42	1,2	Возмущение потоком висящего груза
16	$50 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^5$	$6,2 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^4$	—	—	—	4	3	0,15	0,7	Букировка баржи с заданной скоростью

Вариант	$m_T$	$k_{1T}$	$k_s$	$P_1$	$P_s$	$\alpha^\circ$	$F_0$	$v_A$	$U$	$\gamma$	$v_M(0)$	Содержание задачи
17	9	$8 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^3$	$0,8 \cdot 10^2$	—	$25^\circ$	120	—	—	0,22	0,9	Воздействие заданной силы на прибор в пружинном амортизаторе
18	$3 \cdot 10^3$	$6,2 \cdot 10^4$	—	$4,5 \cdot 10^3$	—	—	—	2	4	0,35	1,3	Подъем груза краном с заданной скоростью
19	80	$6,5 \cdot 10^2$	—	75	—	$15^\circ$	—	—	2	0,12	1,5	Свободный спуск альпиниста по канатной дороге
20	$5 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^4$	—	$6,1 \cdot 10^3$	—	—	—	2,5	3,3	0,45	1,4	Перемещение груза краном с заданной скоростью
21	$1,2 \cdot 10^2$	$6,2 \cdot 10^3$	—	$3,8 \cdot 10^2$	—	$40^\circ$	$4,2 \cdot 10^2$	—	—	0,28	0,7	Воздействие заданной силы на буй
22	$4,8 \cdot 10^{-4}$	80	80	0,2	—	$35^\circ$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,11	$3 \cdot 10^{-2}$	Воздействие заданной силы на чувствительную массу акселерометра
23	$150 \cdot 10^3$	$6,3 \cdot 10^5$	—	$1,2 \cdot 10^5$	$3,5 \cdot 10^4$	—	—	—	2,5	0,4	2,3	Свободный дрейф судна в потоке
24	60	$7,2 \cdot 10^2$	—	80	—	$15^\circ$	45	—	—	0,16	1,5	Скольжение груза с трением по ленте транспортера
25	$70 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^4$	—	$8,2 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	—	—	3	—	0,35	0,9	Буксировка дирижабля с заданной скоростью
26	$8,5 \cdot 10^3$	$8,8 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^4$	—	$10^\circ$	$3,5 \cdot 10^4$	—	—	0,24	0,7	Воздействие заданной силы на контейнер в пружинном подвесе
27	$270 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^6$	$0,45 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	—	—	4,5	—	0,5	2,3	Буксировка судна с заданной скоростью
28	250	$2,9 \cdot 10^3$	—	$1,7 \cdot 10^2$	—	—	—	—	5	0,18	3	Свободное движение катера против течения
29	500	$8,5 \cdot 10^3$	—	$9 \cdot 10^2$	—	—	—	3	—	0,14	1,8	Перемещение груза подъемным краном с заданной скоростью
30	$8 \cdot 10^3$	$9,2 \cdot 10^4$	$8,4 \cdot 10^4$	$3,1 \cdot 10^4$	—	—	—	—	2	0,16	2,1	Удержание понтона в потоке тросом

**Указания к составлению уравнений движения.** Движение точки под действием сил  $\bar{F}_1, \bar{S}_1, \dots$  описывается уравнением Ньютона в векторной форме

$$m \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{F}_1 + \bar{S}_1 + \dots \quad (2)$$

Зависимость векторов сил упругости и вязкого трения от векторов деформации и скорости дается выражениями вида

$$\bar{F}_1 = -k_1 \bar{r}_{AM}, \quad \bar{S}_1 = -\mu_1 \bar{v}_M, \dots \quad (3)$$

Если точка находится в среде, которая движется с заданной скоростью  $\bar{U}$ , то сила вязкого трения зависит от скорости точки относительно среды:

$$\bar{S}_1 = -\mu_1 (\bar{v}_M - \bar{U}), \dots \quad (4)$$

Векторы деформации  $\bar{r}_{AM}, \dots$  в (2) следует выразить через радиус-векторы  $\bar{r}_M, \bar{r}_A$  точек  $M, A, \dots$ , выбрав точку  $O$ , указанную на рисунках, за начало векторов:

$$\bar{r}_{AM} = \bar{r}_M - \bar{r}_A, \dots \quad (5)$$

В вариантах с заданным движением точки  $A$  вектор  $\bar{r}_A$  зависит от времени.

Выберем систему координат  $Oxy$ , в которой векторы из (3), (4), (5), разлагаются наиболее простым образом:

$$\begin{aligned} \bar{r}_M &= x\bar{i} + y\bar{j}; \quad \bar{r}_A = x_A\bar{i} + y_A\bar{j}; \\ \bar{v}_M &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}; \quad \bar{U} = U_x\bar{i} + U_y\bar{j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (3), (4), (5) и далее в (2) даст два однотипных уравнения вида

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A) - \mu(\dot{x} - U_x) + G_x + \dots, \dots \quad (7)$$

Здесь через  $k$  и  $\mu$  обозначены коэффициенты упругости и вязкого трения, приведенные к координате  $x$ .

**Определение установившегося движения системы и характерных времен переходных процессов.** Установившиеся движения системы описываются решениями следующего вида:

$$\begin{aligned} x^* &= C_1 t + C_2; \quad y^* = C_3 t + C_4; \\ \dot{x}^* &= v_{M,x}^* = C_1; \quad \dot{y}^* = v_{M,y}^* = C_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — константы, определяемые подстановкой (8) в (7).

**Определение начальных условий.** Начальные условия системы (7) по координатам задаются табл. 6 в рассогласованиях от установившегося решения  $\bar{r}_M(0)/r_{M^*}(0) = \gamma$ . Используя (8), запишем:  $x(0) = \gamma C_2, y(0) = \gamma C_4$ . В вариантах 1, 4, 9, 11, 14, 19, 23, 24, 28,

уравнения которых не зависят от переменной  $x$ , следует принять  $C_2=0$ , т. е.  $x(0)=0$ . Этого можно добиться за счет сдвига начала отсчета вдоль оси  $x$ . Начальные скорости даются в описаниях вариантов и табл. 6.

**Определение характерного времени движения.** Система (7) состоит из двух независимых уравнений. Запишем характеристическое уравнение, которое соответствует первому уравнению из (7), описывающему движение по переменной  $x$ :

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет либо комплексные сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega \quad (i^2 = -1); \quad \delta > 0, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

либо вещественные отрицательные

$$\lambda_1 = -\delta_1, \quad \lambda_2 = -\delta_2; \quad \delta_1, \delta_2 > 0. \quad (11)$$

В случае (10) решение системы (7) имеет колебательные затухающие составляющие с частотой  $\omega$ . Период этих колебаний  $T_{\pi} = 2\pi/\omega$ . Следовательно, характерным временем, на котором выявляется колебательный характер движения, будет время порядка  $T_{\pi}$ .

В случае (11) решение системы (7) имеет экспоненциальные составляющие вида  $Ce^{-\delta_1 t}$ ,  $Ce^{-\delta_2 t}$ , или  $Ce^{-t/T_1}$ ,  $Ce^{-t/T_2}$ . Здесь  $T_1 = 1/\delta_1$ ,  $T_2 = 1/\delta_2$  — постоянные времени аperiodического процесса. Характерным временем, на котором выявляется аperiodический характер каждой из этих составляющих, будет время порядка  $T_1$ , соответственно  $T_2$ . За такое время эта составляющая уменьшается в  $e \approx 2,72$  раза.

Характерные времена движения системы по переменной  $y$  определяются аналогично в силу второго уравнения системы (7).

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Система дифференциальных уравнений (7) приводится к форме Коши и интегрируется численным методом на интервале  $\tau$ . Чтобы при счете выявилось поведение всех составляющих движения, величину  $\tau$  следует выбрать равной наибольшему из характерных времен этих составляющих.

На печать выводятся переменные  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $v_{Mx} = \dot{x}$ ,  $v_{My} = \dot{y}$  с шагом, равным  $\tau/24$ . Для упрощения программы и ее индивидуализации значения параметров вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения методом Рунге — Кутты с обращением к стандартной программе.

**Контроль решения.** Числовые значения параметров подобраны так, что характерные времена всех составляющих движения отличаются не более чем в 2—3 раза. Большие различия указывают на ошибку в составлении уравнений (7) или ошибку вычисления корней характеристического уравнения.

Числовой счет должен дать движение с составляющими такого

вида, какие получились при анализе корней характеристического уравнения. Переходный процесс, вычисленный ЭВМ, должен стремиться к установившемуся движению (8), найденному аналитически.

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Объяснить переход от схемы объекта к расчетной модели.
2. Объяснить запись выражения для скорости точки относительно потока.
3. Записать уравнения движения для измененного набора сил, действующих на точку.
4. Объяснить методику составления характеристического уравнения системы.
5. Объяснить смысл характерного времени для каждой составляющей движения.
6. Каким будет движение, если рассогласования начальных условий от установившегося движения будут равны нулю?
7. По графику  $x(t)$  найти значение производной в заданный момент времени и сравнить с результатом счета.
8. Для заданного момента времени построить на траектории вектор скорости и ускорения точки.
9. По графику  $v_{mx}(t)$  приближенно построить график  $x(t)$ . Сравнить с результатами счета.
10. По графику  $v_{mx}(t)$  построить график  $\omega_{mx}(t)$ .
11. Объяснить смысл операторов программы.

#### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Груз  $M$  поднимается в потоке жидкости по несущему тросу 1, который в ненагруженном состоянии совпадает с прямой  $OO_1$  (рис. 42, а). Груз приводится в движение тележкой

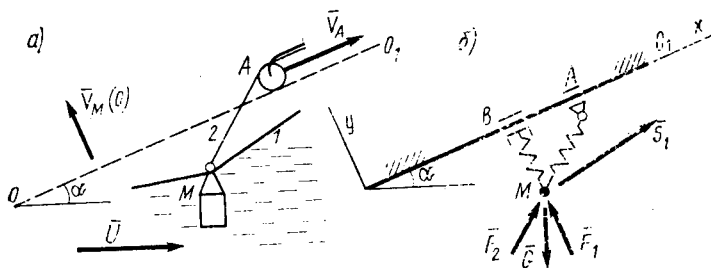


Рис. 42

А, соединенной с грузом  $M$  тяговым тросом 2. Тележка движется по прямой  $OO_1$  с заданной скоростью  $\bar{v}_A$ . Учитывается поперечная упругость троса 1 и продольная — троса 2. Масса тросов считается равной нулю. В начальный момент времени точка А совпадает с заданной точкой О. Скорость потока  $\bar{U}$  горизонтальна.

Дано:  $m = 1070$  кг;  $k_1 = 10\,300$  Н/м;  $k_2 = 2500$  Н/м;  $\mu_1 = 3800$  Н·с/м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 1$  м/с;  $U = 0,7$  м/с;  $\gamma = \bar{r}_M(0)/\bar{r}_{M^*}(0) = 0,5$ ;  $v_M(0) = 1$  м/с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения точки. 2. Найти установившееся движение. 3. Определить характерные времена, за которые развиваются составляющие движения. 4. Проинтегрировать на ЭВМ уравнения движения, найти переходный процесс выхода на установившееся движение. 5. Построить графики  $v_{Mx}(t)$ ,  $v_{My}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  и траекторию движения точки в плоскости  $Oxy$ .

**Составление уравнений движения.** Расчетная механическая модель системы представлена на рис. 42, б. На материальную точку  $M$  действуют сила  $\bar{G}$ , сила  $\bar{F}_1$  упругости троса 1, сила  $\bar{F}_2$  упругости троса 2, сила  $\bar{S}_1$  вязкого трения.

Запишем в векторной форме уравнение Ньютона движения точки:

$$m \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{G} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{S}_1. \quad (12)$$

Здесь

$$\bar{F}_1 = -k_1 \bar{r}_{BM}, \quad \bar{F}_2 = -k_2 \bar{r}_{AM}, \quad \bar{S}_1 = -\mu \bar{v}^r. \quad (13)$$

Векторы поперечной деформации  $\bar{r}_{BM}$  троса 1, продольной  $\bar{r}_{AM}$  троса 2 и вектор  $\bar{v}^r$  скорости относительно потока определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{r}_{BM} &= \bar{r}_M - \bar{r}_B, \quad \bar{r}_{AM} = \bar{r}_M - \bar{r}_A; \\ \bar{v}^r &= \bar{v}_M - \bar{U}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (12) удобно расписать в проекциях на оси системы координат  $Oxy$  с началом в точке  $O$  и осью  $x$ , совпадающей с направлением  $OO_1$ . В этой системе координат векторы из (12), (13), (14) задаются проекциями

$$\begin{aligned} &\bar{r}_M(x, y), \quad \bar{r}_B(x, 0), \quad \bar{r}_A(v_A t, 0); \\ &\bar{v}_M(\dot{x}, \dot{y}), \quad \bar{U}(U \cos \alpha, -U \sin \alpha); \\ &\bar{G}(-G \sin \alpha, -G \cos \alpha), \quad \bar{F}_1(0, -k_1 y); \\ &\bar{F}_2(-k_2(x - v_A t), -k_2 y); \\ &\bar{S}_1(-\mu_1(\dot{x} - U \cos \alpha), -\mu_1(\dot{y} + U \sin \alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в (12), получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_2(x - v_A t) - \mu_1(\dot{x} - U \cos \alpha) - G \sin \alpha; \\ m\ddot{y} &= -(k_1 + k_2)y - \mu_1(\dot{y} + U \sin \alpha) - G \cos \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Для заданных числовых значений параметров (16) примет вид

$$\ddot{x} = -2,34(x-t) - 3,55\dot{x} - 0,78;$$

$$\ddot{y} = -12y - 3,55\dot{y} - 6,34. \quad (17)$$

**Определение установившегося движения.** Отыскиваем частные решения системы (17) вида

$$x^* = C_1 t + C_2, \quad y^* = C_3 t + C_4, \quad (18)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — неизвестные константы. Подставим (18) в (17) и сгруппируем слагаемые:

$$2,34(C_1 - 1)t + (2,34C_2 + 3,55C_1 + 0,78) = 0;$$

$$12C_3 t + (3,55C_3 + 12C_4 + 6,34) = 0. \quad (19)$$

Уравнения (19) обращаются в тождества, когда коэффициенты при первой и нулевой степени  $t$  порознь равны нулю. Отсюда

$$C_1 = 1; \quad C_2 = -1,85;$$

$$C_3 = 0; \quad C_4 = -0,53.$$

Установившееся движение (18) по координатам примет вид

$$x^* = t - 1,85; \quad y^* = -0,53, \quad (20)$$

по скоростям

$$v_{Mx}^* = \frac{d}{dt} x^* = 1; \quad v_{My}^* = \frac{d}{dt} y^* = 0. \quad (21)$$

**Определение начальных условий.** Начальные условия системы (17) по координатам заданы в рассогласованиях от установившегося решения

$$\bar{r}_M(0) = 0,5\bar{r}_M^*(0). \quad (22)$$

Из (20), (22) запишем  $x(0) = 0,5x^*(0) = -0,93$  м,  $y(0) = 0,5y^*(0) = -0,27$  м.

**Оценка характерного времени переходного процесса.** Запишем характеристические уравнения, соответствующие системе (17):  $\lambda^2 + 3,55\lambda + 2,34 = 0$ ,  $\lambda^2 + 3,55\lambda + 12 = 0$ .

Корни этих уравнений  $\lambda_1 = -0,88$ ,  $\lambda_2 = -2,68$ ,  $\lambda_{3,4} = -1,78 \pm \pm i \cdot 2,97$ . Следовательно, движение системы имеет одну колебательную и две аperiodические составляющие. Найдем период и постоянные времени этих составляющих:

$$T_{11} = 6,28/2,97 = 2,11 \text{ с}, \quad T_1 = 1/0,88 = 1,14 \text{ с},$$

$$T_2 = 1/2,68 = 0,373 \text{ с}. \quad (23)$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Приведем систему (17) к форме Коши:

$$\dot{x} = v_{Mx}, \quad \dot{y} = v_{My}, \quad \dot{v}_{Mx} = \omega_{Mx}, \quad \dot{v}_{My} = \omega_{My};$$

$$\omega_{Mx} = -2,34(x-t) - 3,55v_{Mx} - 0,78;$$

$$\omega_{My} = -12y - 3,55v_{My} - 6,34. \quad (24)$$



```

DATA DT, T, X, Y, VX, VY,
+0.009, 0., -0.93, -0.27, 0., 1./
DO 12 K=1, 241
WX=-2.34*(X-T)-3.55*VX-0.78
WY=-12*Y-3.55*VY-6.24
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
PRINT 30731, T
* X, Y, VX, VY, WX, WY
30731 FORMAT(10F10.3)
2 X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
VX=VX+WX*DT
VY=VY+WY*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	-.930	-.270	0.0	1.00	1.40	-6.65
0.090	-.925	-.203	0.117	0.447	1.18	-5.49
0.180	-.911	-.162	0.216	0.005	1.01	-4.18
0.270	-.888	-.195	0.300	-.317	0.863	-2.87
0.360	-.858	-.233	0.373	-.526	0.745	-1.68
0.450	-.821	-.285	0.436	-.634	0.648	-.663
0.540	-.780	-.344	0.491	-.660	0.566	0.133
0.630	-.734	-.402	0.539	-.624	0.498	0.702
0.720	-.683	-.456	0.581	-.544	0.440	1.06
2.07	0.352	-.522	0.884	0.028	0.104	-.178
2.16	0.432	-.520	0.893	0.013	0.096	-.148

Рис. 43

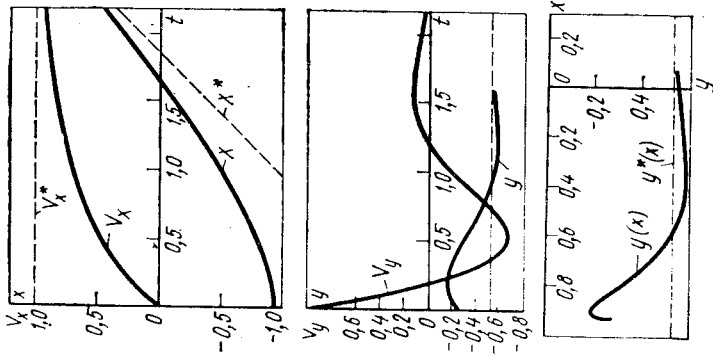


Рис. 44

Систему уравнений (24) решаем на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе. Для интегрирования используем конечно-разностную схему Эйлера. В качестве интервала интегрирования выберем наибольшую из величин в (23). Тогда  $\tau = T_{\pi} = 2,11$  с. За шаг интегрирования примем  $\Delta t = \tau/240 \approx 0,009$  с. Шаг печати равен  $10\Delta t = \approx 0,09$  с.

Программа счета представлена на рис. 43.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные ... $t$	$\Delta t$	$x$	$y$	$v_{Mx}$	$v_{My}$	$\omega_{Mx}$	$\omega_{My}$
Обозначения ... $T$	$DT$	$X$	$Y$	$VX$	$VY$	$WX$	$WY$

По результатам счета на рис. 44 построены графики  $v_{Mx}(t)$ ,  $v_{My}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $y(x)$ .

**Контроль решения.** На рис. 44 пунктиром изображены установившиеся решения, построенные по (20), (21). Видно, что решение системы (17), полученное ЭВМ, стремится к установившемуся. Характерные времена переходного процесса близки к величинам, приведенным в (23).

## Относительное движение материальной частицы по лопатке турбомашинны

### РАСЧЕТ Д-2

**Описание задания.** Цель расчета — знакомство с методикой составления уравнений относительного движения материальной точки, методикой их приведения к безразмерной форме и приобретение опыта решения этих уравнений на ЭВМ.

Рассматривается материальная частица (капля конденсата, частица окалины и т. п.), движущаяся по одной из стенок межлопаточного канала рабочего колеса турбомашинны. Варианты турбомашинны представлены на рис. 45, 46. Для большей наглядности некоторые из вариантов поясняются видом на рабочее колесо по стрелке  $A$ . Направление вращения колеса указано ориентированной дужкой. Поверхность стенки считается плоской, угловая скорость вращения рабочего колеса — постоянной. Сила сопротивления, действующая на частицу, пропорциональна с коэффициентом  $\mu$  ее скорости относительно поверхности. Вес и аэродинамические силы со стороны потока газа считаются пренебрежимо малыми. Условия возможного отрыва частицы от поверхности не обсуждаются.

Исходные данные определяются по формулам (1) и табл. 7. Для всех вариантов  $x(0) = 0$ .

$$\rho = \rho_r + 0,001n, \quad m = (1,3 + 0,01N) 10^{-6};$$

$$r_0 = r_r + 0,01N.$$

(1)

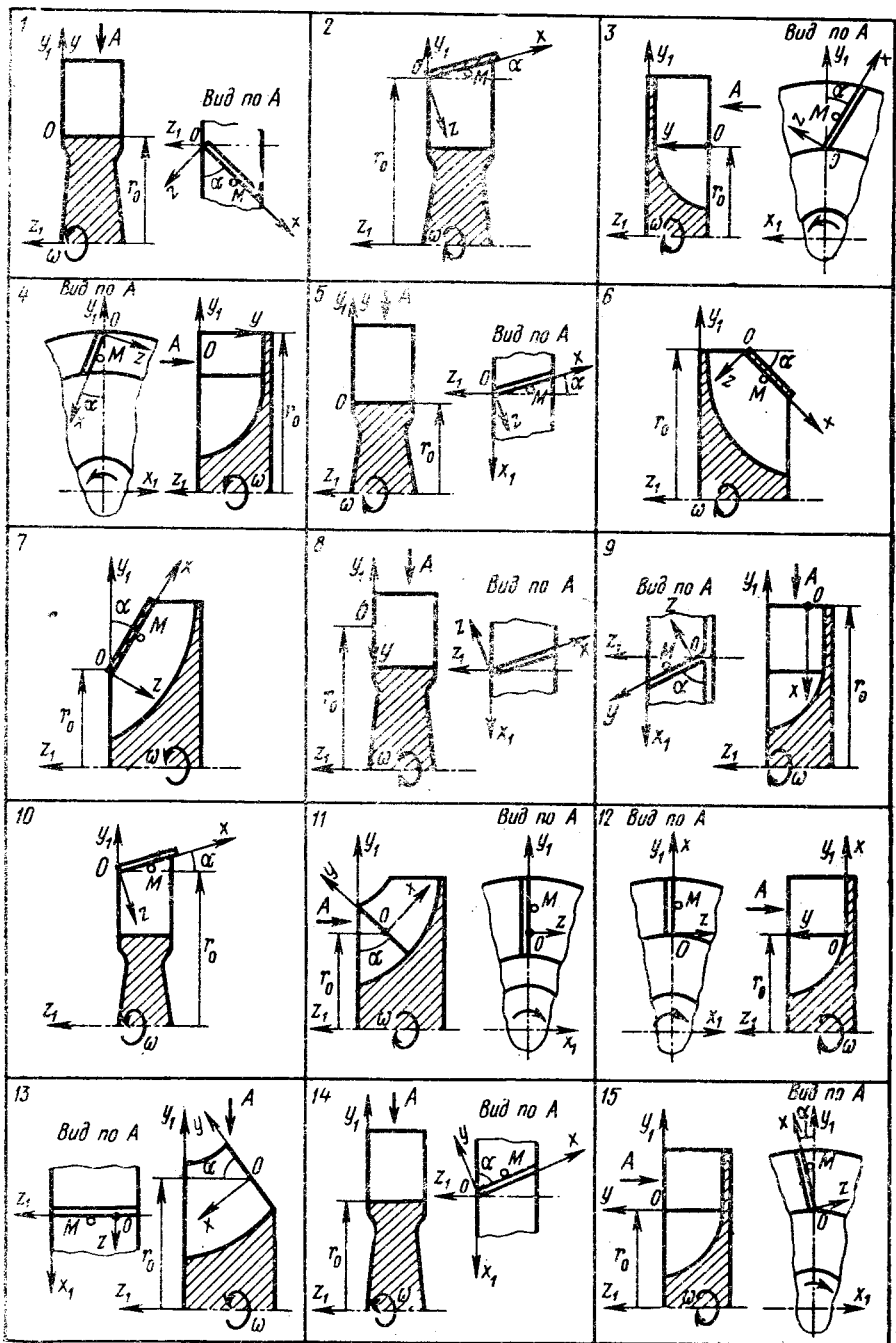


Рис. 45

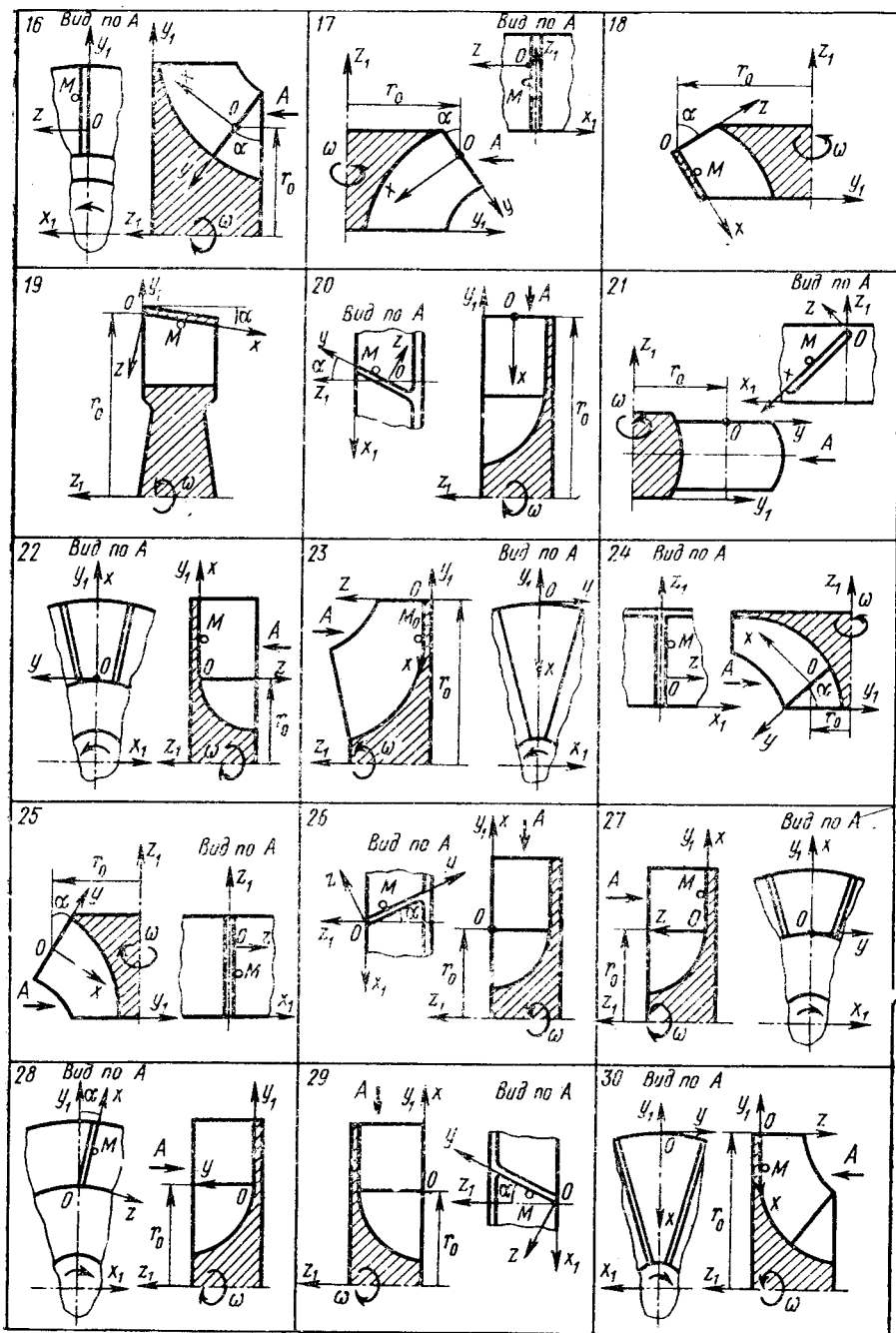


Рис. 46

Ва- риант	$\omega$	$r_r$	$\alpha^\circ$	$\mu_r$	$\tau \cdot 10^4$	$y(0)$	$\gamma_x(0)$	$v_y(0)$
1	800	0,3	30	0,26	2,4	0,01	200	-30
2	600	0,4	14	0,14	4,8	0	120	20
3	700	0,2	20	0,20	2,4	0	0	140
4	500	0,3	18	0,30	9,6	0,02	120	-50
5	600	0,4	20	0,15	2,4	0,01	180	-30
6	400	0,5	40	0,20	6,0	0	100	-10
7	500	0,1	25	0,25	9,6	0	90	-30
8	800	0,2	10	0,28	1,5	0	240	40
9	600	0,3	70	0,40	9,6	0	240	60
10	500	0,3	16	0,10	4,8	0	120	40
11	200	0,2	35	0,05	7,2	0,01	100	-60
12	900	0,2	—	0,78	2,4	0,02	0	-90
13	200	0,6	45	0,05	7,2	0,01	100	-20
14	400	0,4	80	0,08	2,4	0	200	40
15	500	0,2	22	0,17	2,4	0	0	-100
16	300	0,3	34	0,11	4,8	0	120	60
17	200	0,7	45	0,05	7,2	-0,01	120	60
18	100	0,8	50	0,02	9,6	0	80	20
19	300	0,5	12	0,06	4,0	0	150	30
20	600	0,4	19	0,35	8,0	-0,01	180	60
21	100	0,7	42	0,02	4,8	0	150	-20
22	900	0,1	—	0,73	4,0	-0,01	90	30
23	800	0,3	—	0,72	9,0	0,02	160	0
24	200	0,2	40	0,05	3,6	0	110	-40
25	200	0,6	22	0,06	7,2	0,01	100	40
26	900	0,2	14	0,55	2,4	0	0	180
27	700	0,3	—	0,28	4,8	-0,01	35	70
28	600	0,2	16	0,45	2,4	0,02	0	-120
29	800	0,1	17	0,61	2,4	0	0	80
30	900	0,3	—	0,91	8,0	-0,01	180	0

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения относительного движения материальной частицы. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к составлению уравнений движения.** Рекомендуется ввести систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , связанную с рабочим колесом, и  $Oxyz$  — с лопаткой, ось  $z_1$  направлена по оси вращения колеса, оси  $x, y$  лежат в плоскости лопатки, ось  $z$  нормальна к ней.

Движение материальной точки относительно подвижной системы координат  $Oxyz$  описывается векторным уравнением

$$m\bar{w}^r = \bar{F} + \bar{\Phi}^e + \bar{\Phi}^c. \quad (2)$$

Здесь  $\bar{\Phi}^e = -m\bar{w}^e$ ,  $\bar{\Phi}^c = -m\bar{w}^c$  — переносная и кориолисова силы инерции;  $\bar{w}^r$ ,  $\bar{w}^e$ ,  $\bar{w}^c$  — относительное, переносное и кориолисово ускорения точки,  $\bar{F}$  — векторная сумма сил, действующих на нее. Вектор  $\bar{F}$  складывается из вектора силы  $\bar{N}$  нормальной реакции и силы сопротивления  $\bar{R} = -\mu\bar{v}^r$ , где  $\bar{v}^r$  — вектор относительной скорости.

По заданной угловой скорости  $\bar{\omega}$  и направлению вращения рабочего колеса определяется вектор  $\bar{\omega}$  угловой скорости колеса. Вычисляются проекции этого вектора на оси трехгранника  $Oxyz$ . Дается проекциями  $\bar{r}(x, y, 0)$  радиус-вектор точки. Через проекции векторов  $\bar{\omega}$  и  $\bar{r}$  выражаются все векторы, входящие в уравнение (2), которое расписывается затем по осям  $x$  и  $y$ .

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Уравнения движения содержат коэффициенты с множителем  $\omega^2$ , принимающим большие числовые значения. Чтобы уменьшить разрядность используемых при счете чисел, уравнения рекомендуется привести к нормализованной форме, в которую входят коэффициенты порядка единицы. Для этого уравнения следует поделить на множитель  $m$  и перейти затем к безразмерному времени  $t_1 = \omega t$ . Соответствующее изменение масштаба времени нужно сделать в значениях начальных скоростей и величине интервала интегрирования.

Нормализованные уравнения приводятся к форме Коши и интегрируются тем или иным численным методом на интервале безразмерного времени  $\tau_1 = \omega t$ . Один из возможных вариантов программы, использующий конечно-разностную схему Эйлера с шагом, равным шагу печати  $\Delta t_1 = \tau_1/24$ , приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы.

**Контроль решения.** В правильно решенной задаче построенные графики должны быть плавными кривыми, согласованными с начальными условиями.

**Защита расчета. Типовые вопросы:**

1. Объяснить механический смысл слагаемых исходного векторного уравнения.

2. Как изменятся скалярные уравнения движения, если ротор будет вращаться в противоположную по сравнению с условиями сторону?

3. Как изменятся уравнения при неравномерном вращении ротора  $\omega_z = \varepsilon_z \neq 0$ ?

4. Как изменятся уравнения, если знак угла  $\alpha$  изменить на противоположный?

5. Расписать исходное векторное уравнение по оси  $z$  и объяснить его механический смысл.

6. Как с помощью уравнения по оси  $z$  можно было бы определить момент возможного отрыва точки от поверхности?

7. Как изменится траектория движения, если изменить знак  $v_y(0)$ ?

8. Как будет выглядеть траектория при  $x(0), y(0), v_x(0) = 0, v_y(0) > 0$  и при  $v_y(0) < 0$ ?

9. Для заданного момента времени построить на траектории вектор относительного ускорения.

10. Объяснить операторы программы.

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Материальная частица движется по плоской поверхности лопатки центростремительной турбины (рис. 47). Здесь ось  $z_1$  направлена по оси вращения рабочего колеса. Колесо

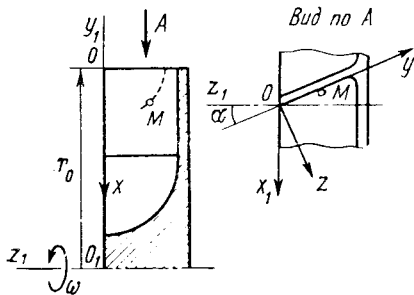


Рис. 47

вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси  $z_1$ . Оси  $x, y$  лежат в плоскости лопатки, ось  $z$  направлена по нормали к ней.

Сила сопротивления между частицей и поверхностью пропорциональна относительной скорости точки. Влияние веса и аэродинамической силы со стороны потока газа считается пренебрежимо малым.

Дано:  $m=1,37 \cdot 10^{-6}$  кг;  $\omega_z=500$  рад/с;  $r_0=0,47$  м;  $\mu=0,107$  кг/с;  $\tau=0,00147$  с;  $\alpha=15^\circ$ ;  $x(0)=0$ ;  $y(0)=0,03$  м;  $v_x(0)=100$  м/с;  $v_y(0)=-30$  м/с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения относительного движения частицы в плоскости лопатки. 2. Привести уравнения к нормализованной форме и проинтегрировать на ЭВМ при заданных начальных условиях. 3. Построить траекторию движения частицы в плоскости  $x, y$  и графики зависимости от безразмерного времени  $v_x^r, v_y^r$ . 4. Для момента времени, соответствующего  $N+2=9$ -й строке таблицы счета, построить на траектории вектор относительной скорости точки и проекции векторов сил инерции  $\Phi_{xy}^c, \Phi_{yx}^c$ .

**Вывод дифференциальных уравнений относительного движения.** Движение материальной точки относительно подвижной системы координат  $Oxyz$  описывается дифференциальными уравнениями

$$m\omega_x^r = F_x + \Phi_x^e + \Phi_x^c;$$

$$m\omega_y^r = F_y + \Phi_y^e + \Phi_y^c. \quad (3)$$

Здесь  $\Phi_x^e = -m\omega_x^e$ ,  $\Phi_y^e = -m\omega_y^e$ ,  $\Phi_x^c = -m\omega_x^c$ ,  $\Phi_y^c = -m\omega_y^c$  — проекции переносной и кориолисовой сил инерции. Сила  $\bar{F}$ , действующая на точку, складывается из силы нормальной реакции  $\bar{N}$  поверхности, направленной по оси  $z$ , и силы сопротивления  $\bar{R}$ , лежащей в плоскости лопатки и пропорциональной относительной скорости. Следовательно, ее проекции

$$R_x = -\mu v_x^r; \quad R_y = -\mu v_y^r. \quad (4)$$

Переносное и кориолисово ускорения определяются формулами

$$\begin{aligned}\bar{w}^e &= \bar{w}_O + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \\ \bar{w}^c &= 2\bar{\omega} \times \bar{v}^r.\end{aligned}\quad (5)$$

Положение частицы в системе координат  $Oxyz$  зададим вектором  $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k} \cdot 0$ . Тогда

$$\bar{v}^r = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k} \cdot 0; \quad \bar{w}_r = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k} \cdot 0. \quad (6)$$

Проведем вычисление слагаемых в (5). Так как  $\bar{\omega} = \bar{i} \cdot 0 + \bar{j}(-\omega \cos \alpha) + \bar{k}(-\omega \sin \alpha) = \text{const}$ , то  $d\bar{\omega}/dt = 0$ . Ускорение  $\bar{w}_O$  точки  $O$  имеет только нормальную составляющую, поэтому  $\bar{w}_O = \bar{i}(\omega^2 r_O) + \bar{j}0 + \bar{k} \cdot 0$ . Векторные произведения таковы:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(y\omega \sin \alpha) + \bar{j}(-\omega x \sin \alpha) + \bar{k}(\omega x \cos \alpha); \\ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ \omega y \sin \alpha & -\omega x \sin \alpha & \omega x \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(-\omega^2 x) + \bar{j}(-\omega^2 y \sin^2 \alpha) + \bar{k}(\omega^2 y \sin \alpha \cos \alpha); \\ \bar{\omega} \times \bar{v}^r &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega \dot{y} \sin \alpha) + \bar{j}(-\omega \dot{x} \sin \alpha) + \bar{k}(\omega \dot{x} \cos \alpha).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}w_x^e &= \omega^2(r_O - x); \quad w_y^e = -\omega^2 y \sin^2 \alpha; \\ w_x^c &= 2\omega \dot{y} \sin \alpha; \quad w_y^c = -2\omega \dot{x} \sin \alpha.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получим

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -\mu \dot{x} - m[\omega^2(r_O - x) + 2\omega \dot{y} \sin \alpha]; \\ m\ddot{y} &= -\mu \dot{y} + m(\omega^2 y \sin^2 \alpha + 2\omega \dot{x} \sin \alpha).\end{aligned}\quad (8)$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Разделим левую и правую части (8) на  $m$  и перейдем к безразмерному времени

$$t_1 = \omega t. \quad (9)$$



Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{dt_1}; \quad \frac{dy}{dt} = \omega \frac{dy}{dt_1};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2x}{dt_1^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2y}{dt_1^2},$$

и уравнения (8) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt_1^2} = -\frac{\mu}{m\omega^2} \frac{dx}{dt_1} - r_0 + x - 2 \frac{dy}{dt_1} \sin \alpha;$$

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} = -\frac{\mu}{m\omega^2} \frac{dy}{dt_1} + y \sin^2 \alpha + 2 \frac{dx}{dt_1} \sin \alpha. \quad (10)$$

Приведем (10) к форме Коши и подставим числовые значения параметров:

$$\frac{dx}{dt_1} = v_x; \quad \frac{dy}{dt_1} = v_y; \quad \frac{dv_x}{dt_1} = w_x; \quad \frac{dv_y}{dt_1} = w_y;$$

$$w_x = -0,312v_x - 0,518v_y + x - 0,47;$$

$$w_y = -0,312v_y + 0,518v_x + 0,067y. \quad (11)$$

Начальные условия системы (11) по переменным  $v_x, v_y$  и интервал интегрирования  $\tau_1$  в соответствии с (9) будут

$$v_x(0) = v'_x(0)/\omega = 0,2; \quad v_y(0) = v'_y(0)/\omega = -0,06; \quad \tau_1 = 0,735.$$

Один из возможных вариантов программы интегрирования уравнений (11) методом Эйлера с шагом, равным шагу печати  $\Delta t_1 \approx 0,0307$ , приведен на рис. 48.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные	$t_1$	$\Delta t_1$	$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$w_x$	$w_y$
Обозначения	T	DT	X	Y	VX	VY	WX	WY

На печать выводятся переменные  $t_1, x, y, v_x, v_y, w_x, w_y$ .

По результатам счета (см. рис. 48) на рис. 49 построены графики  $v_x(t_1), v_y(t_1)$ . На рис. 50 построена траектория движения точки в плоскости  $Oxy$ .

Извлечем из таблицы счета для  $t_1 = 0,245$  (девятая строка) значения координат и скорости точки в безразмерном времени  $x = 0,036$  м;  $y = 0,018$  м;  $v_x = 0,0829$  м;  $v_y = -0,0371$  м.

В размерном времени соответствующие значения скоростей будут

$$v'_x = v_x \omega = 0,0829 \cdot 500 = 41,7 \text{ м/с};$$

$$v'_y = v_y \omega = -0,0371 \cdot 500 = -18,7 \text{ м/с}.$$

Вычислим, используя (7), проекции на оси  $x, y$  сил инерции:

$$\Phi_x^e = -m\omega^2 x = -m\omega^2 (r_0 - x) =$$

```

DATA DT,T,X,Y,VX,VY/
*0.0307,2*0.,0.03,0.199,-0.06/
DO 12 K=1,25
WX=-0.312*VX-0.518*VY-0.47
WY=-0.312*VY+0.518*VX+0.067*Y
PRINT 30731,T
* ,X,Y,VX,VY,WX,WY
30731 FORMAT(10F10.3)
X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
VX=VX+WX*DT
VY=VY+WY*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.0	0.030	0.199	-0.060	-0.501	0.124
0.031	0.006	0.028	0.184	-0.056	-0.492	0.115
0.061	0.012	0.027	0.169	-0.053	-0.484	0.105
0.092	0.017	0.025	0.154	-0.049	-0.475	0.097
0.123	0.022	0.023	0.139	-0.047	-0.468	0.088
0.153	0.026	0.022	0.125	-0.044	-0.460	0.080
0.184	0.030	0.021	0.111	-0.041	-0.453	0.072
0.215	0.033	0.019	0.097	-0.039	-0.447	0.064
0.246	0.036	0.018	0.083	-0.037	-0.441	0.056
.	.	.	.	.	.	.
0.706	0.032	0.003	-0.106	-0.034	-0.387	-0.044
0.737	0.030	0.002	-0.117	-0.035	-0.386	-0.050

Рис. 48

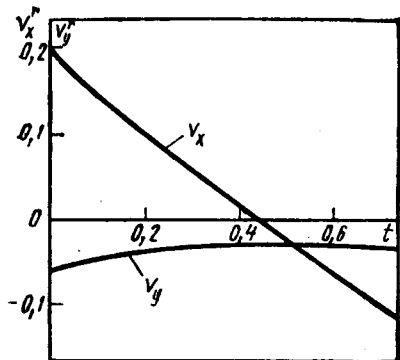


Рис. 49

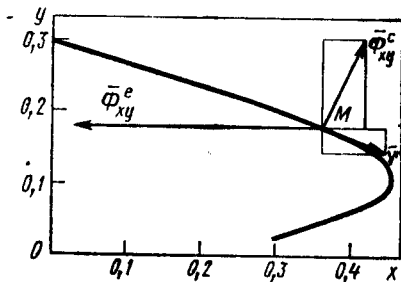


Рис. 50

$$= -1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^5 (0,47 - 0,036) = -150 \cdot 10^{-3} \text{ Н};$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^e &= -m\omega_y^e = m\omega^2 y \sin^2 \alpha = 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 0,018 \cdot 0,259^2 = \\ &= 0,41 \cdot 10^{-3} \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_x^c &= -m\omega_x^c = -2m\omega v_y' \sin \alpha = 2 \cdot 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 18,7 \cdot 0,259 = \\ &= 6,64 \cdot 10^{-3} \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^c &= -m\omega_y^c = 2m\omega v_x' \sin \alpha = 2 \cdot 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 41,7 \cdot 0,259 = \\ &= 14,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}. \end{aligned}$$

Вектор относительной скорости и проекции векторов сил инерции  $\overline{\Phi}_{xy}^e$ ,  $\overline{\Phi}_{xy}^c$  построены на рис. 50. Векторы  $\overline{\Phi}_{xy}^e$ ,  $\overline{\Phi}_{xy}^c$  для наглядности построены в разных масштабах.

**Контроль решения.** Графики  $v_x^r(t_1)$ ,  $v_y^r(t_2)$  и траектории движения (рис. 49, 50) являются плавными кривыми, согласованными с исходными начальными условиями.

## Динамика манипулятора

### РАСЧЕТ Д-3

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта кинематического и кинетостатического описания движения плоских механизмов, ознакомление с методикой решения обратных задач динамики механических систем.

Рассматривается механизм типа манипулятора с двумя степенями свободы, предназначенный для перемещения груза. Варианты кинематических схем механизмов приведены на рис. 51—54. Переносимый точечный груз  $A$  массой  $m$  за время  $\tau$  под действием двигателей управления, расположенных в шарнирах  $B$  и  $D$ , перемещается из точки  $a$  в точку  $b$  с заданной скоростью

$$v_{Ax} = 0, \quad v_{Ay} = v \sin pt. \quad (1)$$

Элементы конструкции механизма считаются абсолютно жесткими и безынерционными. Силы трения в шарнирах и ползунах отсутствуют. В вариантах 4, 9, 15, 17, 19, 22, 25 каток 2 относительно опорной поверхности не проскальзывает.

Исходные данные задаются формулами (2) и табл. 8:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1r} + 0,01n; \quad r_i = r_{ir} + 0,01N \quad (i=2,3); \\ v &= \pi/N; \quad \tau = 0,24N; \quad p = \pi/\tau; \\ \varphi_i(0) &= \varphi_{ir} + 0,01N \quad (i=1, 2, 3); \quad m = 10 + N. \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется исследовать с помощью ЭВМ движение манипулятора. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к составлению уравнений кинетостатики для моментов управления.** Система освобождается от связей и разделяется на от-

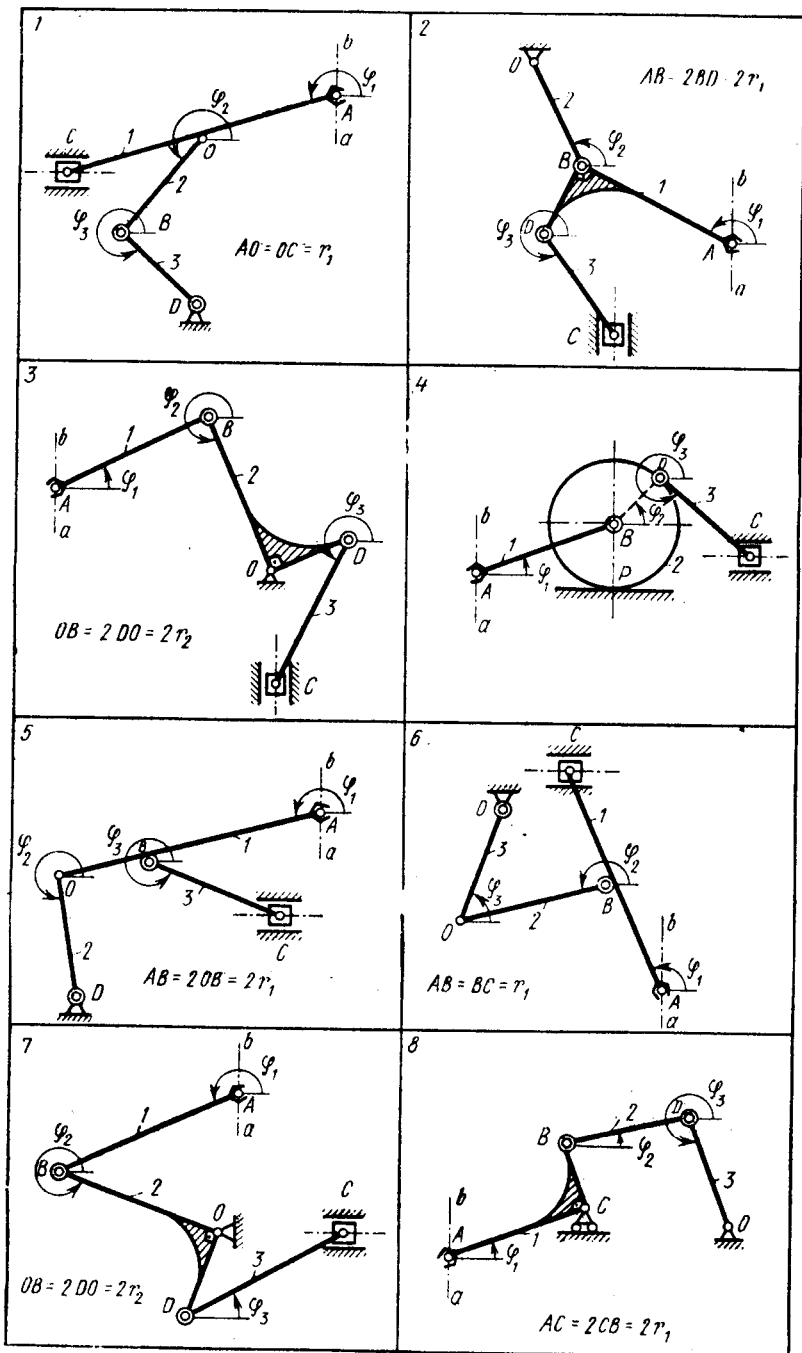


Рис. 51

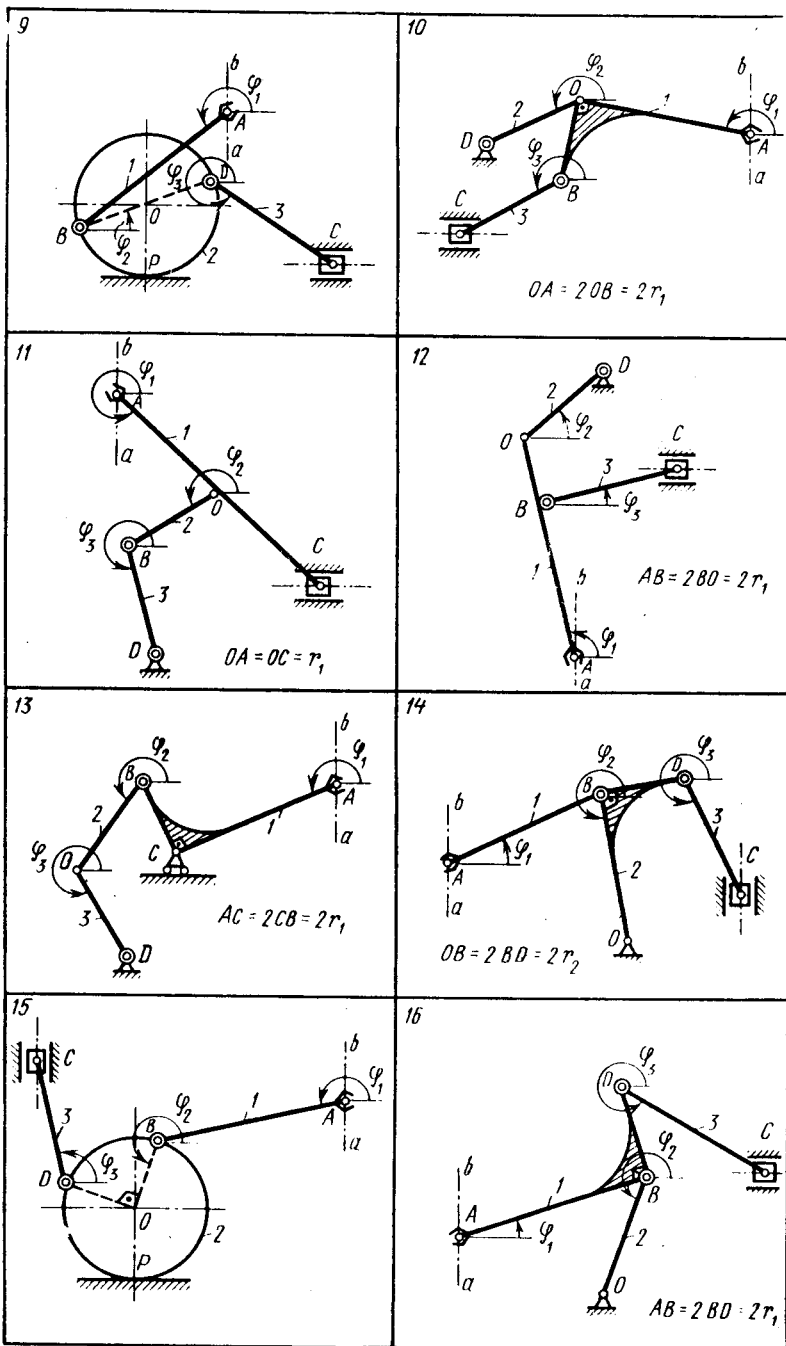


Рис. 52

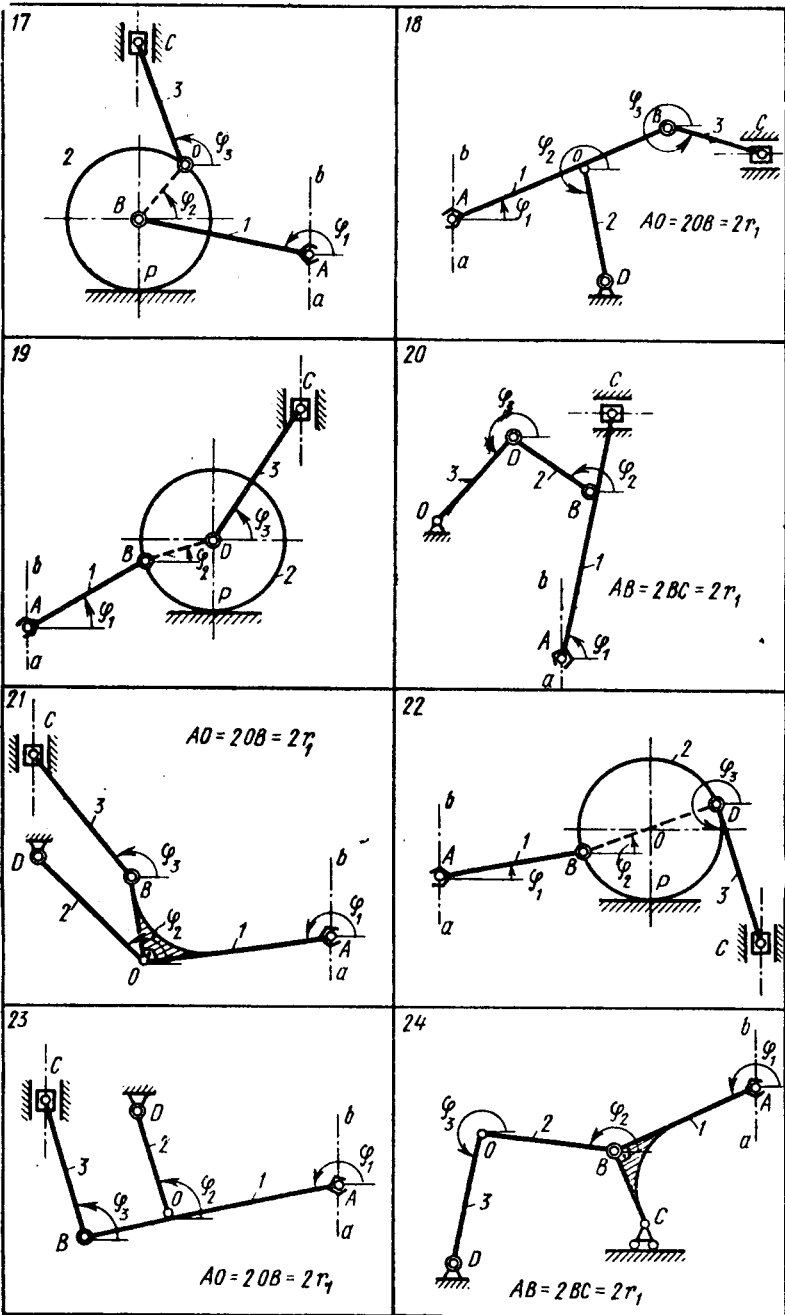


Рис. 53

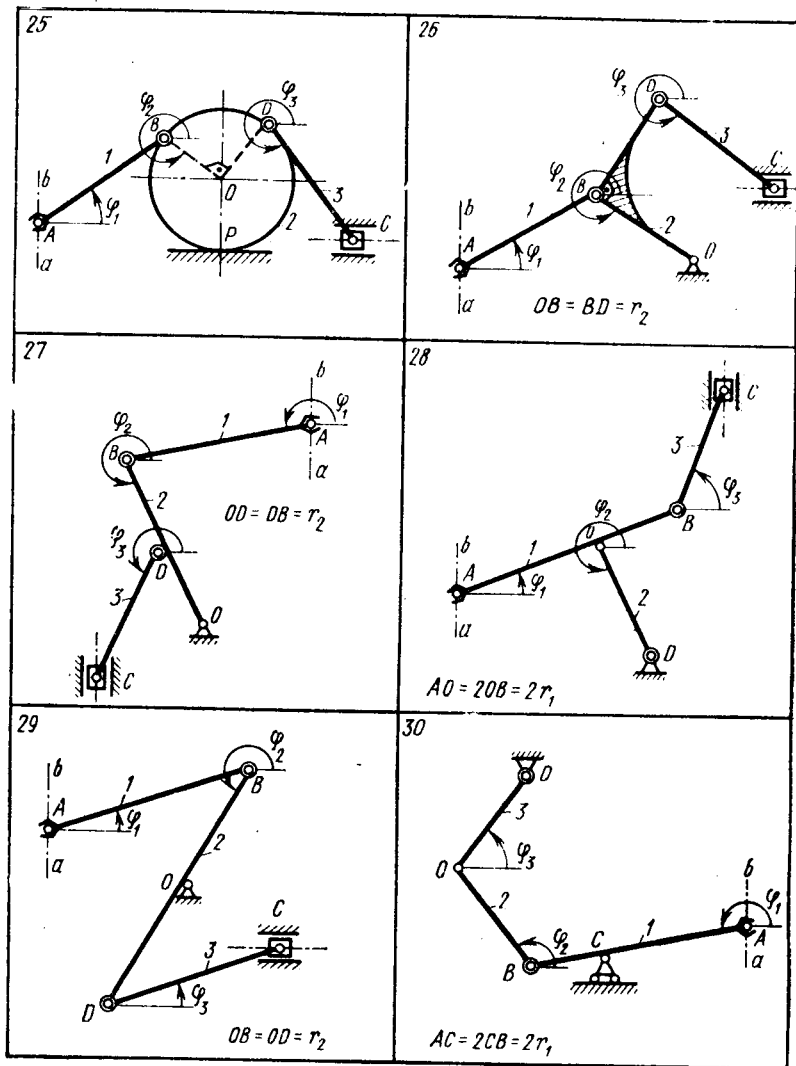


Рис. 54

дельные звенья или группы звеньев. Вводятся реакции связей. Задаются активные силы: внешняя сила — вес точки  $A$  — и внутренние моменты управления  $M_{Bz}$  и  $M_{Dz}$ . При освобождении от связей в точках  $B$  и  $D$  к смежным звеньям прикладываются моменты противоположных знаков. За положительный для определенности принимается момент, прилагаемый со стороны звена с большим индексом к звену с меньшим индексом. По принципу Даламбера к точке  $A$  условно прикладывается сила инерции  $\overline{F} = -m\overline{w}_A$ . Она определяется для заданного движения (1) точки  $A$ .

Ва- риант	$r_{1r}$	$r_{2r}$	$r_{3r}$	$\varphi_{1r}$	$\varphi_{2r}$	$\varphi_{3r}$
1	0,8	0,7	0,7	3,1	3,7	5,5
2	0,4	0,6	0,6	2,5	2,0	2,0
3	0,8	0,4	0,8	0,5	5,2	4,2
4	0,9	0,5	0,8	0,4	0,7	5,7
5	0,4	0,6	0,6	3,0	4,9	5,8
6	0,7	0,7	0,6	2,0	3,4	1,3
7	0,9	0,4	0,8	3,1	5,9	0,6
8	0,4	0,7	0,7	0,5	0,5	5,1
9	0,9	0,4	0,8	3,7	0,4	5,8
10	0,4	0,6	0,6	2,8	3,6	3,7
11	0,8	0,5	0,6	5,8	3,2	4,7
12	0,4	0,6	0,7	1,9	0,7	0,4
13	0,4	0,6	0,6	3,2	3,9	5,4
14	0,9	0,4	0,7	0,5	5,0	5,2
15	0,9	0,5	0,7	2,8	4,5	1,8
16	0,5	0,7	0,7	0,4	4,2	5,0
17	0,9	0,5	0,7	2,6	0,7	2,0
18	0,4	0,6	0,5	0,4	5,0	5,8
19	0,7	0,5	0,8	0,5	0,3	1,0
20	0,4	0,5	0,6	1,1	2,5	3,7
21	0,5	0,7	0,7	3,1	2,5	2,5
22	0,9	0,5	0,8	0,3	0,4	5,1
23	0,4	0,6	0,7	3,3	2,1	2,2
24	0,4	0,7	0,7	3,1	3,0	4,2
25	0,9	0,5	0,8	0,5	5,6	5,5
26	0,8	0,6	0,7	0,5	5,7	5,6
27	0,9	0,5	0,7	3,0	5,1	4,2
28	0,5	0,7	0,7	0,5	5,2	1,2
29	0,9	0,5	0,8	0,4	4,2	0,5
30	0,6	0,6	0,6	3,0	2,1	0,7

Уравнения для  $M_{Bz}$ ,  $M_{Dz}$  образуются из уравнений кинестатики для механической системы, включающей точку  $A$ , и статических уравнений для механических систем, образованных из безынерционных звеньев. Из этих уравнений определяются

$$M_{Bz} = M_{Bz}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \quad M_{Dz} = M_{Dz}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \quad (3)$$

**Указания к составлению кинематических уравнений движения.** Выражения для зависимости трех неизвестных угловых скоростей  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  от заданной скорости точки  $A$  получаются так же, как в расчетах К-1, К-2, из уравнений трех внешних связей, налагаемых на систему. Из этих уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{1z} &= \omega_{1z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \quad \omega_{2z} = \omega_{2z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \\ \omega_{3z} &= \omega_{3z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) позволяют определить угловые скорости звеньев для фиксированного момента времени при заданных в этот момент значениях  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ . Изменение  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , а следовательно, и  $\omega_{1z}$ ,



$\omega_{2z}, \omega_{3z}$  во времени определится, если дополнить систему (4) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрированием которой при заданных начальных значениях  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$  решается кинематическая задача о движении плоского механизма. Эти уравнения манипулятора, являющегося системой с двумя степенями свободы, записаны в избыточном наборе трех переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Поэтому начальные значения углов нельзя задавать произвольно. Они вычисляются предварительно для заданного начального положения точки  $A$  и приводятся в (2) и табл. 8.

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Нелинейная система дифференциальных уравнений (4), (5) с заданными начальными условиями интегрируется на интервале времени  $\tau$ . Одновременно с вычислением  $\varphi_i$  по формулам (3) находятся величины  $M_{Bz}, M_{Dz}$ . Шаг печати выбирается равным  $\Delta t = \tau/24 = 0,01$  с. На печать выводятся переменные  $t, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, M_{Bz}, M_{Dz}$  и скорость точки  $C$ . Для упрощения программы линейные размеры звеньев вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнения (4), (5) интегрируются по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать систему (4), (5) методом Рунге — Кутта, используя стандартные подпрограммы; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов; вывести результаты не только в виде таблиц, но и в виде графиков и т. д.

**Указания к вычислению мощности управляющих двигателей.** Мощность, которую развивают двигатели, вычисляется по формулам вида

$$N_B = M_{Bz}\omega_{iz} + (-M_{Bz})\omega_{jz}. \quad (6)$$

Здесь  $i, j = i+1$  — номера звеньев, соединяемых шарниром  $B$ . Если шарнир прикреплен к неподвижному основанию, формула (6) перейдет в

$$N_B = M_{Bz}\omega_{iz}. \quad (7)$$

**Контроль решения.** Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. При  $t=0$  и при  $t=\tau$  скорость груза  $A$  равна нулю, поэтому в правильно решенной задаче угловые скорости звеньев в начальный момент должны быть равны нулю, а при  $t=\tau$  отличие за счет погрешностей счета от нуля должно быть малым. Результаты вычисления на ЭВМ угловых скоростей звеньев должны близко совпадать с результатами графоаналитического решения для момента времени  $t = (N+1)\Delta t$ , выполненного, как в расчете К-1.

### Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Можно ли решить задачи 4, 9, 15, 22, 25, если допустить проскальзывание звена 2?
2. Как изменятся уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если груз движется горизонтально со скоростью  $v_{Ax} = v \sin pt$ ?
3. Как изменятся уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если груз движется с постоянной скоростью  $v_{Ay} = v$ ,  $v_{Ax} = 0$  или  $v_{Ax} = v$ ,  $v_{Ay} = 0$ ?
4. Можно ли задавать произвольным образом начальные значения углов  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$ ?
5. Составить уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если движение груза задано уравнениями  $x_A = x_A(t)$ ,  $y_A = y_A(t)$ .
6. Изобразить на рисунке графоаналитического решения векторы скоростей тех или иных точек.
7. Найти м. ц. с. звеньев в произвольном положении механизма.
8. По графику  $\omega_{1z}(t)$  оценить приращение величины  $\varphi_1$  за время  $\tau$ .
9. Объяснить по виду функции  $\omega_{1z}(t)$  характер изменения функции  $\varphi_1(t)$ .
10. Объяснить значение каждого оператора в программе.
11. Изменить программу таким образом, чтобы мощность каждого двигателя управления вычислялась на ЭВМ как функция времени.
12. Чему равна мощность двигателей при  $t=0$ ,  $t=\tau$ ?
13. Как изменились бы уравнения задачи в случае инерционных звеньев манипулятора?

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Манипулятор, кинематическая схема которого приведена на рис. 55, перемещает точечный груз массы  $m$  за время  $\tau$  из точки  $a$  в точку  $b$  с заданной скоростью  $v_{Ax}=0$ ,  $v_{Ay}=v \sin pt$ . Управляющие двигатели расположены в шарнирах  $B$  и  $D$ .

Дано:  $BC=r_1=0,53$  м;  $AC=2r_1$ ,  $OB=r_2=0,47$  м;  $OD=r_3=0,47$  м;  $\varphi_1(0)=0,57$  рад,  $\varphi_2(0)=5,77$  рад;  $\varphi_3(0)=5,17$  рад;  $\tau=1,68$  с;  $v=0,45$  м/с;  $p=1,87$  рад/с,  $m=17$  кг.

Массой элементов конструкции можно пренебречь.

Требуется: 1. Составить уравнения кинестатики для определения управляющих моментов, реализующих заданное программное движение груза. 2. Составить кинематические уравнения, определяющие изменение во времени угловых скоростей, углов поворота звеньев и скорости точки  $C$ . 3. Решить полученные уравнения на ЭВМ на интервале времени  $\tau$ . 4. Построить графики  $M_{Bz}(t)$ ,  $M_{Dz}(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\omega_{3z}(t)$ . 5. Для момента времени  $t=(N+1)\Delta t=$

$=0,56$  с определить с помощью графоаналитического метода угловые скорости звеньев, скорость точки  $C$  и сравнить с результатами счета на ЭВМ. 6. По данным счета найти мощность каждого двигателя при  $t=0,56$  с.

**Составление уравнений кинестатики для управляющих моментов.** Освободим систему от связей, как показано на рис. 56. Изобразим реакции связей, активные: силу  $\vec{G}$  точки  $A$  и внутренние мо-

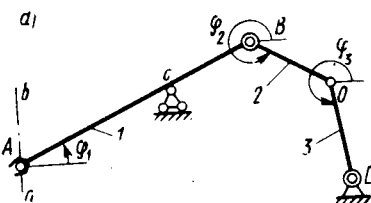


Рис. 55

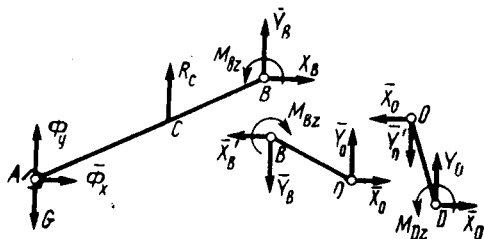


Рис. 56

менты управления  $M_{Bz}$ ,  $M_{Dz}$ . По принципу Даламбера условно приложим к точке  $A$  силу инерции  $\vec{\Phi} = -m\vec{w}_A$ . Для заданного движения точки  $A$  вычислим

$$\Phi_x = 0;$$

$$\Phi_y = -m\omega_{Ay} = -m\dot{v}_{Ay} = -mvp \cos pt. \quad (8)$$

Составим уравнения равновесия систем сил, указанных на рис. 56.

Из уравнений проекций сил на ось  $x$  для звеньев 1, 2 и 3 с учетом (8) получим

$$X_D = X_O = X_B = 0. \quad (9)$$

Из уравнений проекций сил на ось  $y$  для звеньев 2 и 3 получим

$$Y_D = Y_O = Y_B. \quad (10)$$

Составим с учетом (8), (9), (10) уравнение моментов для звена 1 относительно точки  $C$ , для звена 2 относительно точки  $B$ , для звена 3 относительно точки  $O$ . Вычисление моментов производится с помощью формул вида

$$\vec{M}_O(\vec{R}_D) = \vec{OD} \times \vec{R}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_3 \cos \varphi_3 & r_3 \sin \varphi_3 & 0 \\ 0 & Y_D & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(Y_D r_3 \cos \varphi_3).$$

Проделав выкладки, получим

$$M_{Bz} + [Y_O + 2(G - \Phi_y)] r_1 \cos \varphi_1 = 0;$$

$$-M_{Bz} + Y_O r_2 \cos \varphi_2 = 0; \quad M_{Dz} + Y_O r_3 \cos \varphi_3 = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$M_{Bz} = -\frac{2(G + mvp \cos pt) r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r_2 \cos \varphi_2 + r_1 \cos \varphi_1};$$

$$M_{Dz} = -\frac{r_3 \cos \varphi_3}{r_2 \cos \varphi_2} M_{Bz}. \quad (12)$$

**Составление кинематических уравнений.** Уравнения для определения трех неизвестных скоростей  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  даются тремя уравнениями внешних связей, налагаемых на механизм (см. рис. 55):

$$v_{Cy} = 0; \quad v_{Dx} = 0; \quad v_{Dy} = 0. \quad (13)$$

Запишем выражение для скорости точки  $C$ :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{AC}.$$

Проецируя обе части этого равенства на оси координат, получим

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \omega_{1z} \cdot 2r_1 \sin \varphi_1; \quad (14)$$

$$v_{Cy} = v_{Ay} + \omega_{1z} \cdot 2r_1 \cos \varphi_1. \quad (15)$$

При вычислении скорости точки  $D$  рекомендуется последовательно находить скорости точек в соответствии с графом

$$C \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} O \xrightarrow{3} D:$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{\omega}_1 \times \bar{CB} + \bar{\omega}_2 \times \bar{BO} + \bar{\omega}_3 \times \bar{OD}.$$

Отсюда

$$v_{Dx} = v_{Cx} - \omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3; \quad (16)$$

$$v_{Dy} = v_{Cy} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3. \quad (17)$$

Приравняв правые части (15)–(17) нулю, получим систему уравнений для определения  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$ . Разрешая эту систему, получим

$$\omega_{1z} = -0,45 \sin pt / (2r_1 \cos \varphi_1);$$

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} r_1 [\sin(\varphi_1 - \varphi_3) + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3] / [r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)];$$

$$\omega_{3z} = -(\omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2) / (r_3 \cos \varphi_3). \quad (18)$$

Скорость  $v_{Cx}$  определена уравнением (14). Дополним (18) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (19)$$

**Вычисление мощности двигателей управления:**

$$N_B = M_{Bz} (\omega_{1z} - \omega_{2z}); \quad (20)$$

$$N_D = M_{Dz} \omega_{3z}. \quad (21)$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Вычисления в силу уравнений (12), (14), (18), (19) будем проводить на ЭВМ.

Для интегрирования уравнений (18), (19) применим конечно-разностную схему Эйлера с шагом интегрирования, равным шагу печати  $\Delta t=0,07$  с. Программа счета представлена на рис. 57.

```

DATA DT,T,F1,F2,F3,P/
*0.07,0.,0.57,5.77,5.17,1.87/
DO 12 K=1,25
C1=COS(F1)
C2=COS(F2)
C3=COS(F3)
OM1=-0.425*SIN(P*T)/C1
OM2=-1.13*OM1*(SIN(F1-F3)+2*SIN(F1)*C3)/
/SIN(F2-F3)
OM3=-(OM1+1.13*C1+OM2*C2)/C3
VC=-1.06*OM1*SIN(F1)
UMB=-16*(9.8+0.842*COS(P*T))*C1*C2/
/(C1+C2/1.13)
UMD=-UMB*C3/C2
PRINT 30731,T
*,F1,F2,F3,OM1,OM2,OM3,VC,UMB,UMD
30731 FORMAT(10F10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
F3=F3+OM3*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.570	5.77	5.17	0.0	0.0	0.0	0.0	-77.4	39.3
0.070	0.570	5.77	5.17	-0.066	0.194	-0.240	0.038	-77.4	39.2
0.140	0.565	5.78	5.15	-0.130	0.362	-0.453	0.074	-77.6	37.7
0.210	0.556	5.81	5.12	-0.192	0.481	-0.613	0.107	-78.1	34.9
0.280	0.543	5.84	5.08	-0.248	0.549	-0.716	0.136	-78.8	31.2
0.350	0.525	5.88	5.03	-0.299	0.579	-0.774	0.159	-79.4	26.8
0.420	0.505	5.92	4.97	-0.343	0.583	-0.796	0.176	-80.0	22.1
0.490	0.481	5.96	4.92	-0.380	0.573	-0.793	0.186	-80.4	17.3
0.560	0.454	6.00	4.86	-0.410	0.553	-0.771	0.190	-80.7	12.6
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.61	0.088	6.39	4.48	-0.856	0.061	-0.010	0.005	-75.7	-17.9
1.68	0.084	6.48	4.47	0.0	0.0	0.0	0.0	-75.7	-17.9

Рис. 57

Обозначение переменных в программе:

Переменные . . .  $t$   $\Delta t$   $\varphi_1$   $\varphi_2$   $\varphi_3$   $\omega_{1z}$   $\omega_{2z}$   $\omega_{3z}$   $v_{cx}$   $\rho$   $M_{Bz}$   $M_{Dz}$

Обозначения . . . T DT F1 F2 F3 OM1 OM2 OM3 VC P UMB UMD

Начальные значения  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , числовые значения  $\Delta t$  и  $\rho$  вводятся с помощью оператора DATA. Длины звеньев  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  вводятся как числовые константы. Арифметические выражения этих кон-

стант предварительно вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

По результатам решения задачи на ЭВМ (см. рис. 57) на рис. 58 построены графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\omega_{3z}(t)$ ,  $M_{Bz}(t)$ ,  $M_{Dz}(t)$ .

Для вычисления мощности двигателей извлечем из таблицы счета значения угловых скоростей и моментов управления в момент времени  $t=0,56$  с. Подставляя эти значения в (20), (21), получим  $N_B=80,6(0,409+0,553)=77,5$  Вт;  $N_D=-12,6 \cdot 0,77=-9,7$  Вт.

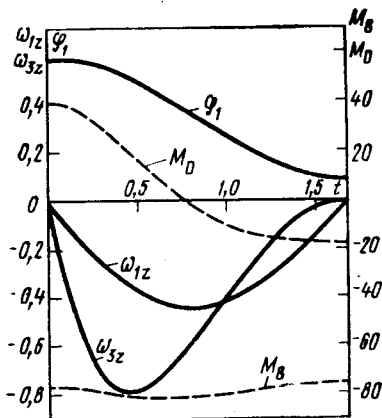


Рис. 58

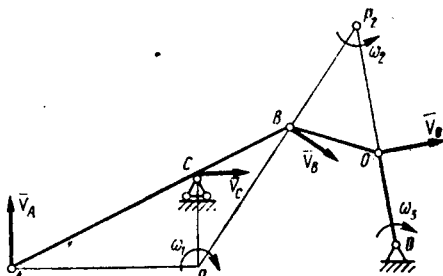


Рис. 59

**Контроль решения.** Графики на рис. 58 не имеют разрывов. При  $t=0$  и  $t=\tau$  угловые скорости звеньев близки нулю, что отвечает нулевой скорости груза  $A$  в эти моменты времени. Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , соответствующие моменту времени  $t=0,56$ , и вычислим для этого момента времени скорость точки  $A$ :

$$\varphi_1 = 0,454 \text{ рад} = 26^\circ; \quad \varphi_2 = 6,0 \text{ рад} = 344^\circ;$$

$$\varphi_3 = 4,86 \text{ рад} = 278^\circ; \quad v_{Ay} = 0,45 \sin pt = 0,39 \text{ м/с.}$$

Это положение механизма изобразим на рис. 59 в масштабе  $1:10$ . Построим мгновенные центры скоростей  $P_1$ ,  $P_2$  первого и второго звеньев. Построим векторы скоростей точек  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $O$ , дужками укажем направление вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки  $C$ . По результатам построения звено 1 вращается по часовой стрелке со скоростью  $\omega_1 = v_A/AP_1 = 0,39/0,95 = 0,41$  рад/с. Ползун  $C$  движется вправо со скоростью  $v_C = \omega_1 CP_1 = 0,41 \times 0,46 = 0,189$  м/с. Звено 2 вращается против часовой стрелки, а звено 3 — по часовой со скоростями

$$\omega_2 = v_B BP_2 = \omega_1 BP_1/BP_2 = 0,41 \cdot 0,84/0,62 = 0,556 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_O OD = \omega_2 P_2 O/OD = 0,556 \cdot 0,66/0,47 = 0,78 \text{ рад/с.}$$

Эти выводы соответствуют результатам счета, приведенным в девятой строке таблицы счета.

# Динамика машины с шатунно-кривошипным приводом

## РАСЧЕТ Д-4

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта математического моделирования динамики машины путем составления и исследования на ЭВМ дифференциальных уравнений движения, приобретение опыта приближенных энергетических оценок.

Рассматривается машина с шатунно-кривошипным приводом. Определяются движение машины и динамические усилия в звеньях. Силы (моменты) нагрузки и сопротивления заданы. Вращающий момент (движущая сила) определяется до счета на ЭВМ приближенно из уравнения энергетического баланса для требуемого периодического движения машины.

Варианты схем машин представлены на рис. 60—63. Элементы конструкции машин считаются абсолютно жесткими, тросы, ремни, ленты транспортеров — нерастяжимыми безынерционными. Взаимное проскальзывание тросов, блоков, колес и т. п. отсутствует. Масса шатуна  $AB$  считается пренебрежимо малой.

Все варианты можно разделить на два типа: к первому (варианты 3—11, 14—22, 25—28, 30) относятся подъемники различного вида, транспортеры, пилы, электрогенераторы и т. п. с приводом от одноцилиндрового двухтактного двигателя внутреннего сгорания с движущей силой  $\bar{F}_д$ , приложенной к поршню. Ко второму типу (варианты 1, 2, 12, 13, 23, 24, 29) относятся прессы, поршневые насосы и компрессоры с приводом от электродвигателя с вращающим моментом  $\bar{M}_д$ . Через  $\bar{F}_н$  обозначена сила нагрузки, приложенная к исполнительному звену машины, поршню насоса, полотну пилы и т. п., через  $\bar{M}_н$  — момент нагрузки.

Во всех вариантах исходные данные подобраны так, что маховик  $I$  вращается против часовой стрелки. На рисунках указаны направления сил и моментов для такого движения машины. Сила  $\bar{F}_д$ , приложенная к поршню  $З$ , отлична от нуля только во время рабочего хода поршня. Рабочему ходу отвечают движения поршня сверху вниз или справа налево. При этом модуль силы дается выражением

$$F_x = \begin{cases} F_0 = \text{const} & \text{при } v_{Bx} \leq 0 (v_{By} \leq 0); \\ 0 & \text{при } v_{Bx} > 0 (v_{By} > 0). \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично записывается выражение для модуля  $F_n$ , если сила нагрузки приложена к поршню (пуансону). Если сила нагрузки приложена к звену, скорость которого не меняет направления, то  $F_n = \text{const}$  (варианты 3, 6, 9, 14, 15, 17, 19, 21, 20). Моменты  $\bar{M}_д$  и  $\bar{M}_н$  постоянны. Силы сопротивления приведены к моменту сопротивления  $\bar{M}_с$ , приложенному к маховику.

Исходные данные для расчета задаются формулами (2) и табл. 9:

$$\begin{aligned} r &= 0,08 + 0,01N; \quad M_{Cz} = -\mu\omega_{1z}; \\ \tau &= 0,24(1 + 0,01N); \quad \mu = 1 + 0,1N; \\ I_1 &= I_{1r} + 0,1n; \quad r/l = 0,12 + 0,001n. \end{aligned} \quad (2)$$





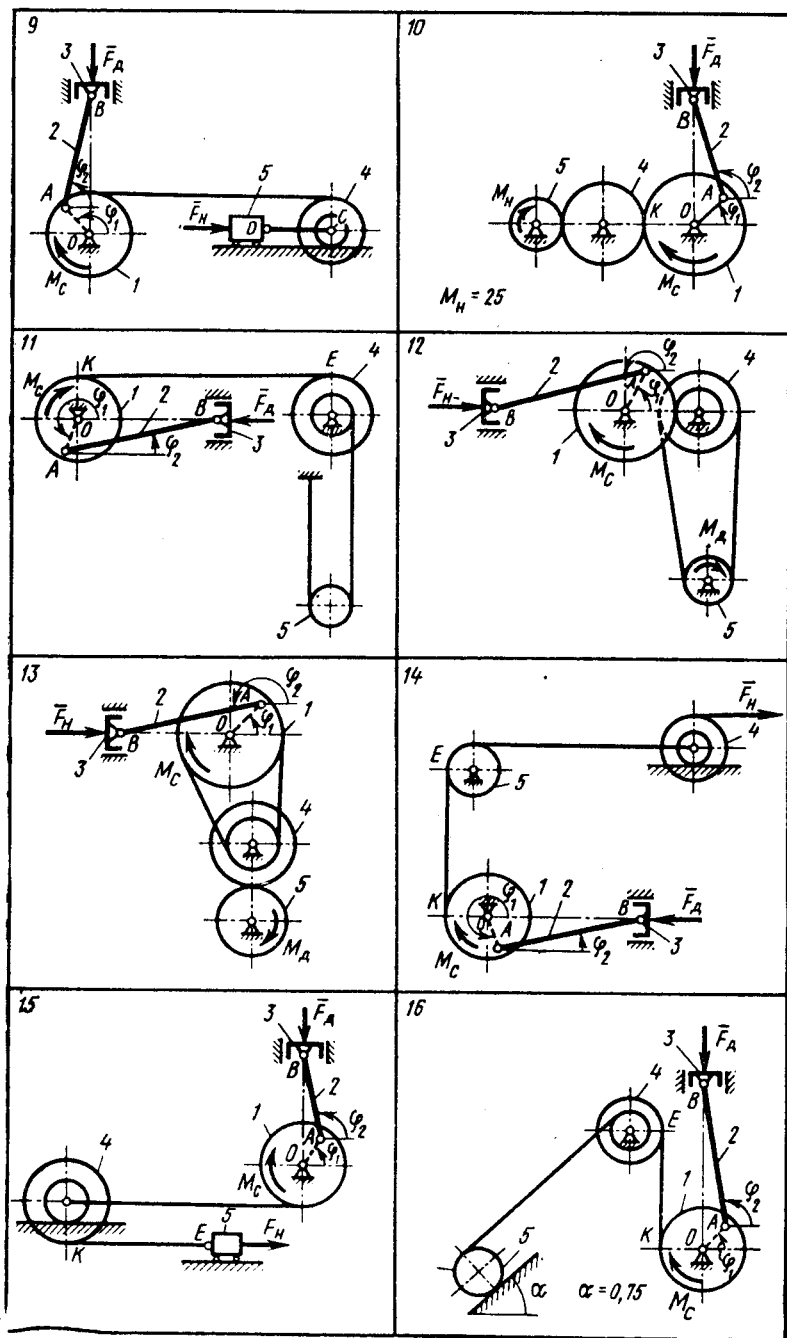


Рис. 61

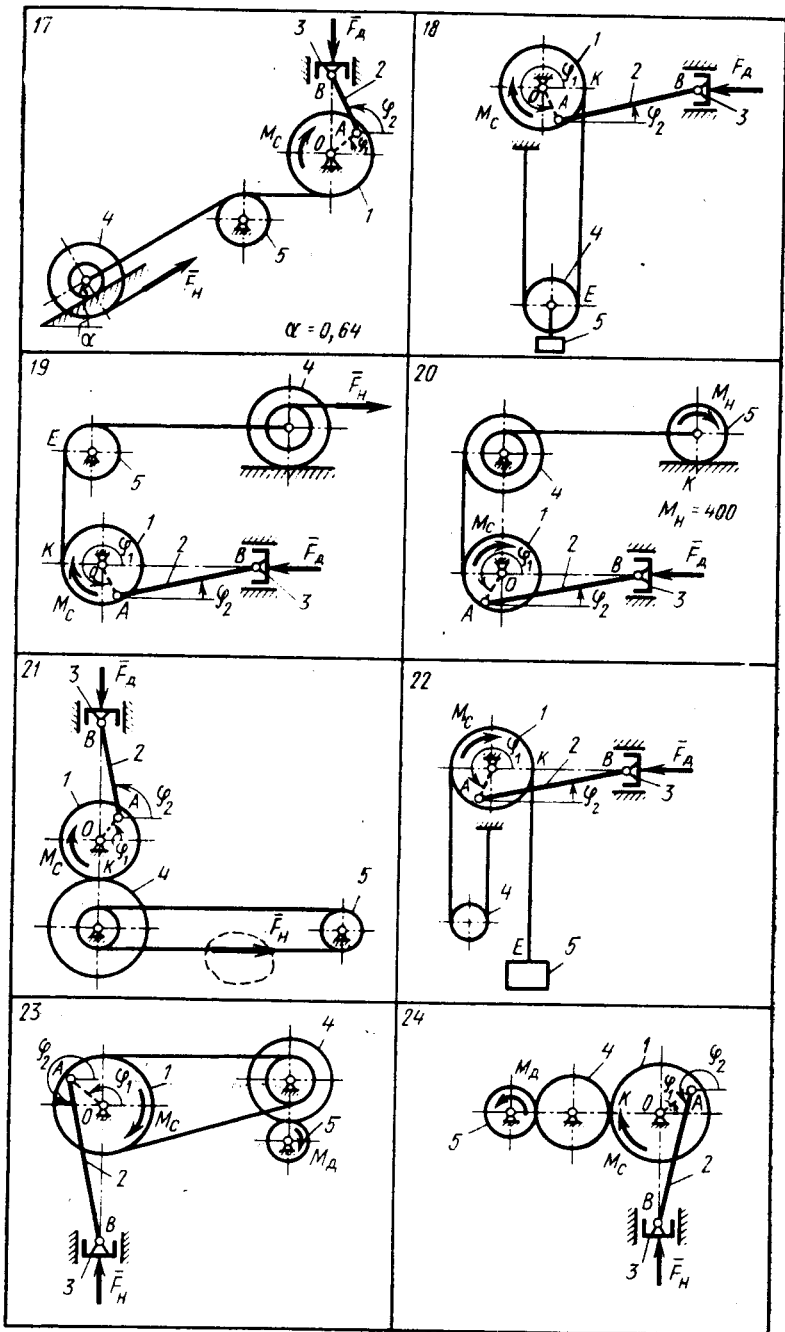


Рис. 62

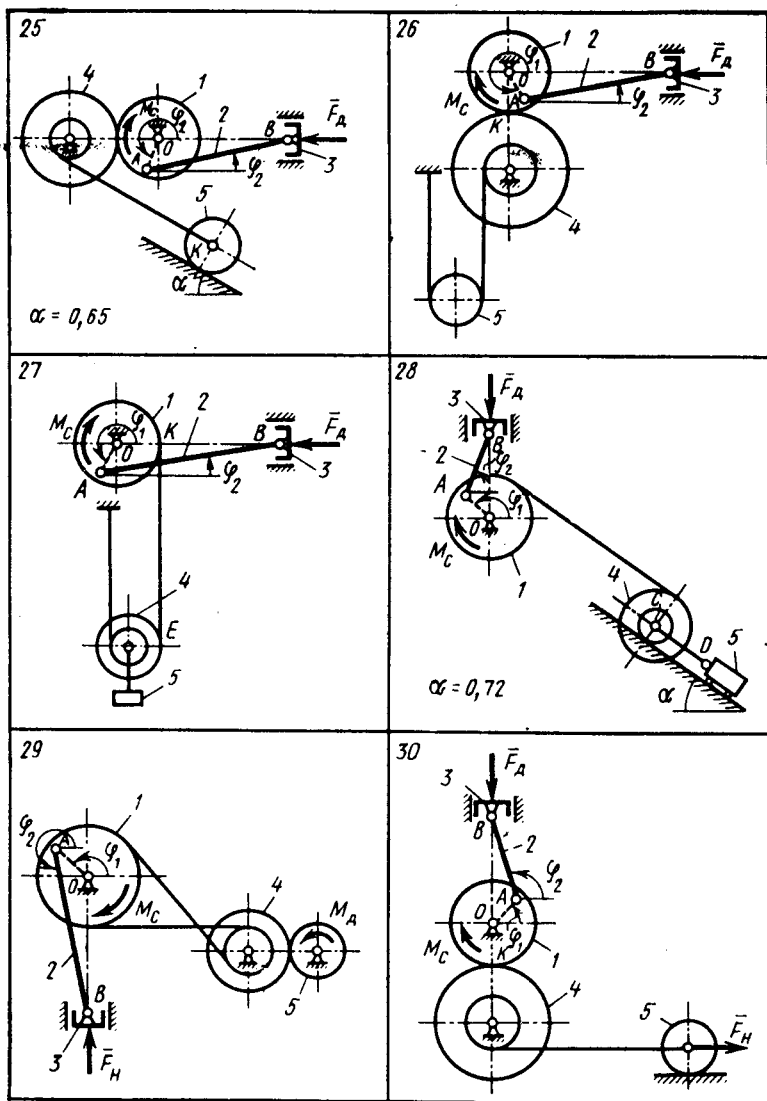


Рис. 63

Здесь  $r$  — длина кривошипа  $OA$ ;  $l$  — длина шатуна  $AB$ . Колеса, блоки, катки, для которых значения радиусов инерции в табл. 9 не указаны, считаются сплошными однородными дисками.

Требуется: 1. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии определить в вариантах первого типа величину  $F_0$ , а в вариантах второго типа — величину  $M_d$ , при которых машина работает в циклическом режиме с заданным периодом  $\tau$ . 2. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения ма-

Вариант	$l_{11}$	$m_2$	$m_4$	$m_5$	$R_1$	$R_4$	$r_4$	$\rho_4$	$R_5$	$F_H$	$\varphi_1(0)$	$\varphi_2(0)$
1	5,0	30	20	10	0,36	0,30	0,12	0,21	0,10	5500	0	3,14
2	6,0	40	15	12	0,36	0,27	0,12	0,18	0,09	6200	1,57	4,71
3	3,0	25	240	10	0,13	0,16	0,09	0,11	—	1100	1,57	1,57
4	4,0	18	110	215	0,14	0,14	0,08	0,09	—	—	3,14	0
5	3,0	20	0	625	0,12	—	—	—	—	—	0	0
6	2,0	15	20	200	0,11	0,16	0,08	0,11	—	1800	4,71	1,57
7	3,0	12	0	220	0,12	0,14	0,07	—	—	—	3,14	0
8	2,0	14	10	370	0,10	—	—	—	—	—	1,57	1,57
9	3,0	12	0	150	0,11	0,20	0,10	—	—	5800	4,71	1,57
10	4,0	24	30	15	0,36	—	—	—	0,06	—	1,57	1,57
11	3,0	16	0	700	0,12	0,16	0,08	—	—	—	0	0
12	6,0	42	35	20	0,39	0,28	0,13	0,15	0,14	6100	0	3,14
13	5,0	45	28	16	0,40	0,32	0,10	0,20	0,16	6400	3,14	3,14
14	2,0	12	250	18	0,10	0,15	0,10	0,12	—	1000	3,14	0
15	2,0	14	300	100	0,11	0,16	0,08	0,13	—	1500	1,57	1,57
16	3,0	16	0	890	0,12	0,14	0,07	—	—	—	4,71	1,57
17	2,0	10	150	12	0,10	0,12	0,06	0,10	—	1100	1,57	1,57
18	3,0	11	20	380	0,12	—	—	—	—	—	0	0
19	3,0	13	200	10	0,12	0,15	0,05	0,12	—	1500	0	0
20	2,0	12	30	200	0,11	0,16	0,08	0,13	0,10	—	3,14	0
21	1,0	10	25	10	0,12	0,18	0,09	0,14	—	3900	1,57	1,57
22	1,0	12	200	300	0,10	—	—	—	—	—	3,14	0
23	3,0	25	32	12	0,36	0,24	0,12	0,17	0,12	6300	4,71	4,71
24	4,0	30	28	11	0,40	—	—	—	0,08	5900	1,57	4,71
25	2,0	15	20	720	0,10	0,15	0,05	0,12	—	—	3,14	0
26	2,0	12	0	900	0,12	0,24	0,10	—	—	—	0	0
27	1,0	12	0	580	0,11	0,12	0,06	—	—	—	3,14	0
28	1,0	10	0	710	0,10	0,12	0,08	—	—	—	1,57	1,57
29	5,0	28	20	10	0,36	0,20	0,09	0,14	0,10	6300	1,57	4,71
30	2,0	12	18	400	0,12	0,18	0,06	0,11	—	5500	1,57	1,57

шины. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере 3. Для момента времени, когда угловое ускорение  $\varepsilon_{1z}$  принимает максимальное по модулю значение, определить одну из следующих динамических реакций: а) окружное усилие в точке  $K$  (в вариантах 1, 6, 10, 17, 20, 21, 24, 25, 26, 30); б) разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи (в вариантах 2, 8, 12, 13, 23, 29); в) натяжение троса  $KE$  (в вариантах 3, 4, 7, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 22, 27); г) усилие в стержне  $CD$  (в вариантах 5, 9, 28).

**Указания к составлению уравнений движения.** Уравнения движения составляются с помощью общих теорем динамики или уравнения Даламбера — Лагранжа и приводятся к следующему виду по избыточному набору переменных:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z};$$

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1z}(\omega_{1z}, \omega_{2z}, \varphi_1, \varphi_2);$$

$$\omega_{2z} = \omega_{2z}(\omega_{1z}, \varphi_1, \varphi_2).$$

(3)

Так как механическая система имеет одну степень свободы, то начальные условия по переменной  $\varphi_2$  не произвольны, а выражаются через начальные условия по  $\varphi_1$ .

**Указания к определению реакций связей.** Если уравнения движения составлялись с помощью общих теорем динамики, то полученную систему динамических уравнений нужно разрешить относительно искомого реакции. Если уравнения составлялись в форме уравнения Даламбера — Лагранжа, то для определения реакций связей рекомендуется освободить соответствующее звено от связей и с помощью общих теорем динамики составить такие уравнения, куда вошла бы искомая реакция.

**Указания к определению  $F_d$  и  $M_d$ .** Во всех вариантах заданы числовые значения полезной нагрузки и коэффициент  $\mu$  момента сопротивления. Силовые факторы  $F_d$ ,  $M_d$ , приводящие машину в движение, определяются из условия периодичности движения с заданным периодом  $\tau$ . Для этого используется теорема об изменении кинетической энергии

$$\Delta T = A_d + A_n + A_c. \quad (4)$$

Для периодического движения машины изменение кинетической энергии  $\Delta T$  за время цикла равно нулю.

В (4) через  $A_d$  обозначена работа, затраченная на приведение машины в движение. В вариантах первого типа это работа движущей силы (1), в вариантах второго типа — работа вращающего момента. Через  $A_n$  обозначена работа, затраченная на преодоление сил полезной нагрузки, через  $A_c$  — работа сил сопротивления, которые в расчете моделируются моментом  $\bar{M}_c$ .

При оценке величины  $A_c$  принимается упрощающее предположение, что маховик вращается равномерно со скоростью  $\omega_{12}^* = 2\pi/\tau$ . Тогда  $M_{c2} = -\mu\omega_{12}^*$  и

$$A_c = \int_0^{2\pi} M_{c2} d\varphi_1 = -\mu 4\pi^2/\tau. \quad (5)$$

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Дифференциальные уравнения движения машины (3) и уравнение для определения усилия  $S$  в шатуне  $AB$  решаются на ЭВМ. Необходимые для интегрирования начальные условия по переменным  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  указаны в табл. 9, начальная угловая скорость берется равной  $\omega_{12}^*$ . Шаг печати  $\Delta t$  выбирается равным  $\Delta t = \tau/24 = 0,01 + 10^{-4}$  N. На печать выводятся переменные  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $S$ . Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения длин и масс звеньев, момента  $M_n$ , тригонометрических функций угла и т. п. вводятся как числовые константы. Значения этих констант предварительно вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

Один из возможных вариантов программы решения задачи с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, для интегрирования дифференциальных уравнений движения использовать стандартную подпрограмму, реализующую метод Рунге — Кутты; дополнить программу операторами, определяющими относительное рассогласование за время  $\tau$  величин  $\omega_{1z}$ ,  $\varepsilon_{1z}$ ,  $S$ ; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов и т. д.

**Контроль решения.** Заданные начальные условия и вычисленные значения величин  $F_0$  и  $M_d$  определяют движение, близкое к установившемуся с периодом  $\tau$ . В правильно решенной задаче относительные рассогласования между начальными и конечными значениями переменных  $\varphi_2$ ,  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\varepsilon_{1z}$  за время одного оборота маховика должны быть малы.

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Для заданного момента времени по результатам счета определить какую-либо из динамических реакций помимо найденных.
2. Объяснить, почему на установившемся режиме движения машины изменение кинетической энергии за один цикл равно нулю.
3. Как изменится уравнение энергетического баланса, если на поршень действует кулонова сила трения скольжения?
4. Объяснить, почему при вычислении величин  $F_d$  и  $M_d$  сила  $G_3$  не учитывается.
5. Гарантирует ли задание начальных условий  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\omega_{1z}(0) = \omega_{1z}^*$  движение в установившемся режиме с первого же оборота маховика?
6. С помощью уравнения (4) оценить характер изменения величины  $\Delta T$ , а следовательно, и характер движения машины при  $\omega_{1z}(0) \gg \omega_{1z}^*$ , при  $\omega_{1z}(0) \ll \omega_{1z}^*$ .
7. По виду полученных графиков приблизительно оценить момент времени начала и конца рабочего хода поршня.
8. По графику функции  $\varphi_1(t)$  найти числовое значение  $\omega_{1z}$  при  $t = 0,5\tau$ ;  $t = \tau$ .
9. Объяснить смысл тех или иных операторов программы.
10. Как изменится программа для случая, когда оба хода машины рабочие?

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Подъемник (рис. 64) приводится в движение поршневым одноцилиндровым двухтактным двигателем внутреннего сгорания. Сила  $F_d$ , действующая на поршень, постоянна при рабочем ходе поршня, равна нулю — при холостом. Момент сопротивления  $M_{Cz} = -\mu\omega_{1z}$ .

Дано:  $OA=r=0,087$  м;  $r_1=0,09$  м;  $r_4=0,12$  м;  $R_4=0,27$  м;  $R_5=0,15$  м;  $r/l=0,123$ ;  $\mu=1,7$  кг·м/с;  $I_1=5,7$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_3=12$  кг;  $m_5=1080$  кг;  $\varphi_1(0)=0$ ;  $\tau=0,257$  с;  $\varphi_2(0)=1,69$ ;  $\alpha=0,512$ . Массы шатуна  $AB$ , ремня, тросов и шкива 4 не учитываются. Ремень и трос

предполагаются нерастяжимыми. Ремень относительно шкивов и каток относительно опорной поверхности не проскальзывают.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения машины и уравнение для определения усилия  $S$  в шатуне  $AB$ . 2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии определить движущую силу, при которой машина работает в циклическом режиме с заданным периодом  $\tau$ . 3. Решить полученные уравнения на ЭВМ для заданных начальных условий на интервале времени  $\tau$ . 4. Построить графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\varepsilon_{1z}(t)$ ,  $S(t)$ . 5. Определить относительную неравномерность хода маховика по  $\omega_{1z}(t)$ . 6. Для момента времени, когда  $\varepsilon_{1z}$  принимает максимальное по модулю значение, определить разность  $S_1$  сил натяжения ведущей  $\bar{P}$  и ведомой  $\bar{Q}$  ветвей ремневой передачи ( $S_1 = \bar{P} - \bar{Q}$ ).

Вывод дифференциальных уравнений движения машины и уравнений для определения динамических усилий. Уравнения движения составим с помощью общих теорем динамики. Освободим систему от внешних связей и обозначим реакции (рис. 65). Запишем динамические уравнения освобожденных от связей тел. Системы координат  $xuz$ ,  $x_1y_1z_1$  выберем так, чтобы скорость точки  $B$  была направлена по оси  $y$ , скорости точек  $D$  и  $E$  — по оси  $x$ , скорости точек  $K$  и  $C$  — по оси  $x_1$ .

Уравнение движения маховика  $I$ , вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$ , имеет вид

$$I_1 \dot{\omega}_{1z} = -S_1 r_1 - \mu \omega_{1z} + Sr \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6)$$

Уравнение поршня  $3$ , движущегося поступательно вдоль оси  $y$ :

$$m_3 \dot{v}_{By} = -F_x - G_3 - S \sin \varphi_2; \quad F_x = \begin{cases} F_0 & \text{при } v_{By} \leq 0; \\ 0 & \text{при } v_{By} > 0. \end{cases} \quad (7)$$

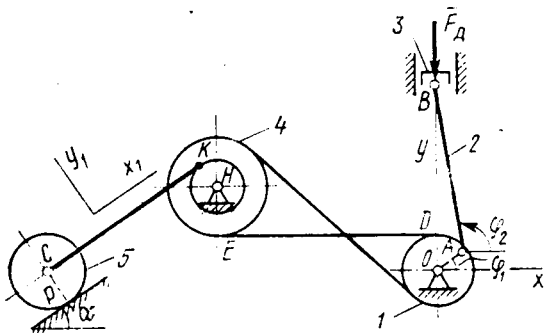


Рис. 64

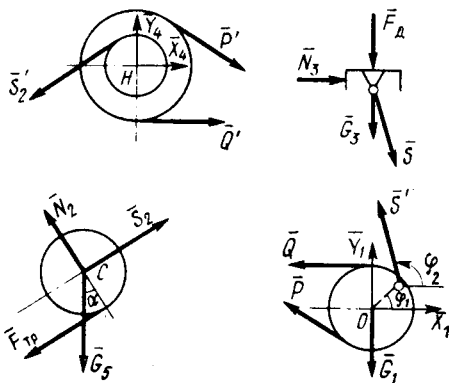


Рис. 65

Для безынерционного шкива 4 запишем уравнение моментов относительно точки  $H$ :

$$0 = -S_1 R_4 + S_2 r_4. \quad (8)$$

Для катка 5 запишем уравнение движения центра масс в проекции на ось  $x_1$  и уравнение изменения кинетического момента относительно оси  $Cz$ :

$$m_5 \dot{v}_{Cx_1} = -F_{\text{тр}} + S_2 - G_5 \sin \alpha; \quad (9)$$

$$I_5 \dot{\omega}_{5z} = -F_{\text{тр}} R_5; \quad I_5 = m_5 R_5^2 / 2. \quad (10)$$

Переменные  $\varphi_1, \varphi_2$ , входящие в правые части уравнений (6), (7), определяются кинематическими уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}. \quad (11)$$

Дополним (6) — (11) уравнениями связей, налагаемых на систему<sup>1</sup>.

Уравнение  $v_{Bx} = 0$  составим в соответствии с графом  $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B$ :

$$v_{Bx} = -\omega_{1z} r \sin \varphi_1 - \omega_{2z} l \sin \varphi_2 = 0. \quad (12)$$

Найдем

$$v_{By} = \omega_{1z} r \cos \varphi_1 + \omega_{2z} l \cos \varphi_2. \quad (13)$$

Уравнения связей  $v_{Dx} = v_{Ex}$ ,  $v_{Cx1} = v_{Kx1}$ ,  $v_{Px1} = 0$  составим в соответствии с графами  $O \xrightarrow{1} D$ ,  $H \xrightarrow{4} E$ ,  $H \xrightarrow{4} K$ ,  $C \xrightarrow{5} D$ :

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \frac{\pi}{2} = -\omega_{4z} R_4 \sin \frac{3}{2} \pi; \quad (14)$$

$$v_{Cx_1} = -\omega_{4z} r_4 \sin \frac{\pi}{2}; \quad (15)$$

$$0 = v_{Cx_1} - \omega_{5z} R_5 \sin \frac{3}{2} \pi. \quad (16)$$

Система уравнений (6) — (16) — замкнутая (двенадцать уравнений с двенадцатью неизвестными  $\varphi_1, \varphi_2, \omega_{1z}, \omega_{2z}, v_{By}, v_{Cx1}, \omega_{4z}, \omega_{5z}, S, S_1, S_2, F_{\text{тр}}$ ).

Приведем (6) — (16) к форме (2). Выражение для  $\omega_{2z}$  получим из (12). Для определения  $\omega_{1z} = \varepsilon_{1z}$  исключим в (6) — (10) все переменные, кроме  $\varphi_1, \omega_{1z}, \varphi_2, \omega_{2z}$ . При этом  $v_{By}$  и  $\dot{v}_{By}$  удобно представить в виде

$$v_{By} = \omega_{1z} u (\varphi_1, \varphi_2); \quad u = r \sin (\varphi_2 - \varphi_1) / \sin \varphi_2;$$

$$\dot{v}_{By} = \varepsilon_{1z} u + \omega_{1z} \dot{u};$$

$$u_1 = \dot{u} = r (\omega_{2z}^2 \sin \varphi_1 - \omega_{1z} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \sin \varphi_2) / \sin^2 \varphi_2. \quad (17)$$

<sup>1</sup> Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.



Проделав выкладки и подставив числовые значения параметров, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \omega_{1z} = \varepsilon_{1z};$$

$$\omega_{2z} = -0,123\omega_{1z} \sin \varphi_1 / \sin \varphi_2;$$

$$\varepsilon_{1z} = [-208 - 1,7\omega_{1z} - (F_x + 118 + 12\omega_{1z}u_1)u] / (8,3 + 12u^2). \quad (18)$$

Усилие  $S$  в шатуне  $AB$  определим из уравнения (7), а разность сил натяжения  $S_1$  — из (6):

$$S = [12(\varepsilon_{1z}u + \omega_{1z}u_1) + F_x + 118] / \sin \varphi_2; \quad (19)$$

$$S_1 = [Sr \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - I_1\varepsilon_{1z} - \mu\omega_{1z}] / r_1. \quad (20)$$

**Определение движущей силы.** Запишем теорему об изменении кинетической энергии:

$$\Delta T = A_x + A_n + A_r \quad (21)$$

За время цикла  $\tau$  на периодическом движении  $\Delta T = 0$ . Работа движущей силы отлична от нуля только при рабочем ходе поршня, поэтому  $A_d = F_0 2r$ . Работа силы тяжести  $G_3$  за цикл равна нулю. Работа полезной нагрузки

$$A_n = \int_0^\tau G_{5x_1} v_{Cx_1} dt = \frac{G_{5x_1} r_1 r_4}{R_4} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 = \frac{-m_5 g r_1 r_4 2\pi \sin \alpha}{R_4}.$$

При вычислении работы сил сопротивления примем упрощающее предположение, что маховик вращается равномерно со скоростью  $\omega_{1z}^* = 2\pi/\tau$ . Тогда

$$A_c = \int_0^{2\pi} M_{Cz} d\varphi_1 = -4\mu\pi^2/\tau.$$

Подставим найденные выражения для  $A_d$ ,  $A_n$ ,  $A_c$  в (21):

$$F_0 2r - m_5 g 2\pi r_1 r_4 \sin \alpha / R_4 - 4\mu\pi^2/\tau = 0. \quad (22)$$

Отсюда для заданных числовых значений величин получим

$$F_0 = (1080 \cdot 9,81 \cdot 0,49 \cdot 6,28 \cdot 0,09 \cdot 0,12 / 0,27 + 4 \cdot 1,7 \cdot 9,87 / 0,257) / 0,174 = 9000 \text{ Н.}$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Систему уравнений (18), (19) будем решать на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе.

Для интегрирования дифференциальных уравнений (18) применим метод Эйлера с шагом, равным шагу печати  $\Delta t = \tau/24 = 0,0107$  с. Программа счета представлена на рис. 66.

```

DATA DT,T,F1,F2,F3,R/
*0.0107,0.,0.,1.69,24.5,0.007/
DO 12 K=1,25
S2=SIN(F2)
U=R*SIN(F2-F1)/S2
F=9000
IF(U.GT.0.)F=0.0
OM2=-0.123*OM1+SIN(F1)/S2
U1=R*(OM2*SIN(F1)-
-OM1*COS(F2-F1)*S2)/S2**2
E1=-(200+1.7*OM1+
+(F+118+12*OM1*U1)*U)/(0.3+12*U**2)
S=-(12*(E1+U+OM1*U1)+F+118)/S2
PRINT 30731,T
*,F1,F2,OM1,OM2,E1,S
30731 FORMAT(10G10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.0	1.69	24.5	0.0	-31.8	-161.
0.011	0.262	1.69	24.2	-.776	-29.9	5.79
0.021	0.521	1.68	23.8	-1.47	-28.3	167.
0.032	0.776	1.67	23.5	-2.04	-27.4	307.
0.043	1.03	1.64	23.2	-2.45	-27.3	412.
0.054	1.28	1.62	23.0	-2.70	-28.1	473.
0.064	1.52	1.59	22.7	-2.78	-29.4	484.
0.075	1.76	1.56	22.3	-2.70	-11.4	-.855E+04
0.086	2.00	1.53	22.2	-2.48	11.5	-.861E+04
0.096	2.24	1.50	22.3	-2.16	31.6	-.869E+04
0.107	2.48	1.48	22.7	-1.72	47.8	-.879E+04
0.118	2.72	1.46	23.2	-1.17	59.3	-.893E+04
0.128	2.97	1.45	23.8	-.502	65.2	-.908E+04
0.139	3.23	1.44	24.5	0.255	64.8	-.926E+04
0.150	3.49	1.45	25.2	1.0	57.9	-.943E+04
0.160	3.76	1.46	25.8	1.85	44.6	-.958E+04
0.171	4.03	1.48	26.3	2.53	25.7	-.969E+04
0.182	4.32	1.51	26.6	3.02	2.78	-.976E+04
0.193	4.60	1.54	26.6	3.25	22.4	-.977E+04
0.203	4.88	1.57	26.4	3.28	-31.8	-741.
0.214	5.17	1.61	26.0	2.88	-33.3	-681.
0.225	5.45	1.64	25.7	2.35	-34.2	-592.
0.235	5.72	1.66	25.3	1.67	-34.2	-477.
0.246	5.99	1.68	24.9	0.889	-33.4	-337.
0.257	6.26	1.69	24.6	0.077	-31.9	-177.

Рис. 66

Обозначение переменных в программе:

Переменные	$t$	$\Delta t$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\omega_{1z}$	$\omega_{2z}$	$\varepsilon_{1z}$	$u$	$u_1$	$F_d$	$S$
Обозначения	T	DT	F1	F2	OM1	OM2	E1	U	U1	F	S

Так как  $\omega_{1z} > 0$ , то по (17) знаки величин  $v_{By}$  и  $u$  совпадают. Поэтому выражение для  $F_d$  записывается в виде

$$F_d = \begin{cases} 900, & \text{если } u \leq 0; \\ 0, & \text{если } u > 0. \end{cases}$$

Это выражение реализуется в программе следующими операторами:

$$F = 9000$$

$$IF (U.GT.0.) F = 0.$$

Результаты решения задачи на ЭВМ (см. рис. 66) представлены графиками  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\varepsilon_{1z}(t)$ ,  $S(t)$  на рис. 67.

Из графика для  $\omega_{1z}(t)$  определим относительно неравномерность хода машины:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{(\omega_{1z})_{\max} - (\omega_{1z})_{\min}}{(\omega_{1z})_{\max}} \\ &= \frac{26,6 - 22,2}{26,6} = 0,17. \end{aligned}$$

Вычислим разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи. Из графика  $\varepsilon_{1z}(t)$  находим, что угловое ускорение маховика принимает максимальное по модулю значение при  $t$ , равном

0,139 с. В этот момент времени  $\varphi_1 = 3,22$ ;  $\varphi_2 = 1,44$ ;  $\omega_{1z} = 24,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varepsilon_{1z} = 64,8 \text{ с}^{-2}$ ;  $S = -9250 \text{ Н}$ .

Подставляя числовые значения величин в (20), получим

$$\begin{aligned} S_1 &= [-9250 \cdot 0,087 \sin(1,44 - 3,22) - 5,7 \cdot 64,8 - \\ &- 1,7 \cdot 24,5] / 0,09 = 4180 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**Контроль решения.** Из таблицы счета и графиков на рис. 67 видно, что движение машины близко к периодическому, оговоренному в условиях задачи.

## РАСЧЕТ Д-4а

Выполнить расчет Д-4 для случая, когда оба хода поршня (пуансона) являются рабочими. При этом силы  $F_d$ ,  $F_n$ , приложенные к поршню (пуансону), задаются формулами вида

$$F_{dx} = F_0 \operatorname{sign} v_{Bx}; \quad F_{nx} = -F_0 \operatorname{sign} v_{Bx}.$$

Здесь  $F_0$  — положительная константа, а

$$\operatorname{sign} v_{Bx} = \begin{cases} 1 & \text{при } v_{Bx} > 0; \\ -1 & \text{при } v_{Bx} \leq 0. \end{cases}$$

## Динамика машины с кулисным приводом

### РАСЧЕТ Д-5

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта математического моделирования динамики машины путем составления дифференциальных уравнений движения и их исследования с помощью ЭВМ.

Рассматриваются машины с кулисным приводом. Определяются движение под действием заданных сил и моментов и динамические усилия в звеньях. Числовые значения параметров и начальные условия задаются так, что движение близко к периодическому.

Варианты схем машин представлены на рис. 68, 69. Элементы конструкции машин считаются абсолютно жесткими, ремни — нерастяжимыми и безынерционными. Проскальзывание колес, ремней и т. д. отсутствует. Трением между пальцем А кривошипа и прорезью кулисы пренебрегаем.

Машины приводятся в движение электродвигателем, развивающим момент  $M_d$ . Полезная нагрузка моделируется для разных вариантов либо силой  $\bar{F}_n$ , либо моментом  $\bar{M}_n$ .

Исходные данные задаются формулами (1) и табл. 10:

$$M_{xz} = M_0 - k\omega_{iz}; \quad k = k_\tau (1 + 0,01N);$$

$$F_{nx} = -\mu_1 v_{4x}, \quad (F_{ny} = -\mu_1 v_{4y});$$

$$M_{nz} = -\mu_2 \omega_{4z};$$

$$\mu_1 = \mu_{1\tau} (1 + 0,01N); \quad \mu_2 = \mu_{2\tau} (1 + 0,01N);$$

$$I_1 = I_{1\tau} + 0,1n; \quad \tau = 0,24(1 + 0,01N). \quad (1)$$

Интервал времени интегрирования  $\tau$  задается близким ко времени полного оборота маховика в периодическом движении. Радиус маховика  $R_1$  равен 0,36 м,  $OA = r_1 = 0,06$  м. В вариантах 7, 9, 11, 24 радиус инерции  $\rho_4 = 0,1$  м.

Требуется: 1. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения машин  $\lambda$ . Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере. 2. Для момента времени, когда угловое

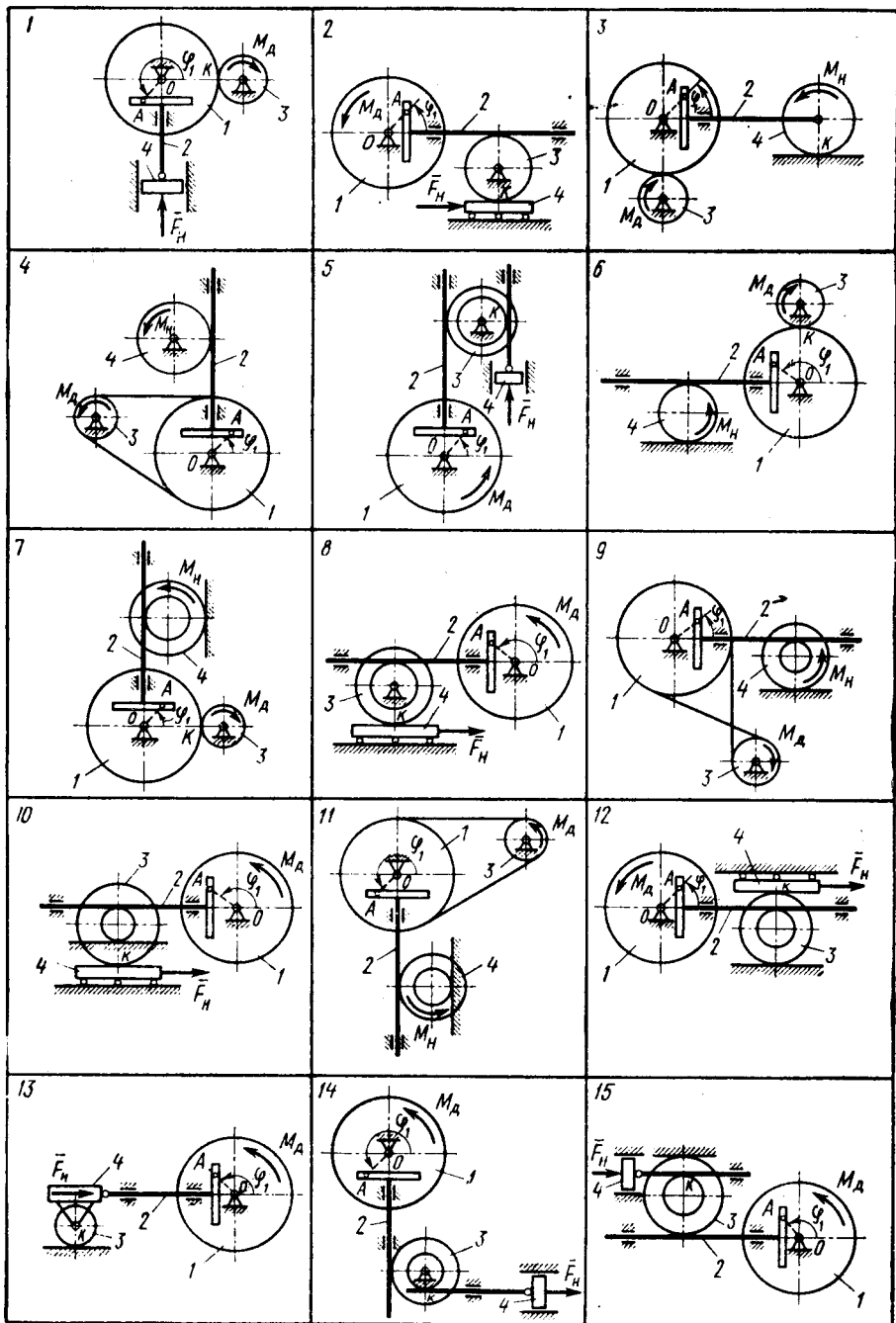


Рис. 63



ускорение  $\varepsilon_{1z}$  принимает максимальное по модулю значение, определить динамические реакции: а) окружное усилие в точке К (варианты 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29); б) разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ремней

Таблица 10

Ва- риант	$M_0$	$k_r$	$\mu_{1r}$	$\mu_{2r}$	$f_{1r}$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$R_1$	$r_1$	$\rho_1$	$R_2$	$r_2$	$\varphi_1(0)$
1	-50	0,8	344	—	1,4	21	9,26	24	0,18	—	—	—	—	1,6
2	102	3,3	331	—	2,0	15	10	20	0,13	—	—	—	—	0
3	-34	0,3	—	9,56	1,5	20	7,72	24	0,12	—	—	0,12	—	3,1
4	26	0,2	—	3,48	1,7	26	4,63	20	0,09	—	—	0,09	—	1,6
5	105	3,5	639	—	2,0	10	15	20	0,12	0,08	0,09	—	—	1,5
6	-53	0,8	—	4,72	1,4	24	9,26	24	0,18	—	—	0,10	—	3,2
7	-27	0,2	—	20,6	1,5	20	7,72	20	0,09	—	—	0,12	0,08	1,6
8	108	3,5	222	—	2,0	10	20	15	0,10	0,08	0,08	—	—	3,1
9	-27	0,2	—	20,6	1,4	15	9,26	30	0,09	—	—	0,15	0,05	0
10	110	3,8	571	—	2,0	12	20	20	0,18	0,08	0,12	—	—	3,1
11	37	0,4	—	11,5	1,7	22	4,63	32	0,12	—	—	0,12	0,06	4,7
12	112	3,7	246	—	2,0	14	24	12	0,16	0,12	0,14	—	—	0
13	113	3,7	342	—	2,0	12	25	10	0,12	—	—	—	—	3,1
14	114	3,8	856	—	2,0	15	20	28	0,10	0,06	0,08	—	—	4,7
15	115	3,9	2234	—	2,0	16	18	30	0,20	0,06	0,14	—	—	3,2
16	116	3,9	2654	—	2,0	18	20	16	0,10	0,05	0,08	—	—	0
17	39	0,4	—	6,95	1,4	23	9,26	32	0,12	—	—	0,12	—	0
18	118	3,9	337	—	2,0	12	16	10	0,08	—	—	—	—	3,1
19	119	3,9	3231	—	2,0	20	30	40	0,14	0,07	0,08	—	—	0
20	120	4,0	—	3,24	2,0	10	16	12	0,10	—	—	—	—	3,1
21	121	4,0	1380	—	2,0	24	32	16	0,07	—	—	—	—	3,2
22	122	4,1	700	—	2,0	12	22	18	0,18	0,06	0,12	—	—	0
23	-41	0,4	—	6,10	1,5	15	7,72	20	0,12	—	—	0,10	—	1,5
24	-31	0,2	—	49,2	1,7	25	4,63	36	0,09	—	—	0,16	0,08	3,1
25	63	1,0	—	35,4	1,4	24	9,26	32	0,18	—	—	0,14	—	1,6
26	126	4,2	5440	—	2,0	18	40	26	0,18	0,09	0,10	—	—	0
27	-36	0,4	—	29,9	1,5	26	7,72	24	0,12	—	—	0,16	—	0
28	128	4,3	1308	—	2,0	22	24	16	0,15	—	—	—	—	3,1
29	129	4,2	101	—	2,0	12	10	10	0,05	—	—	—	—	3,2
30	65	1,0	—	5,36	1,4	17	9,26	16	0,18	—	—	0,10	—	0

ной передачи (варианты 4, 9, 11, 17, 25, 30); в) усилие в стержне CD (варианты 16, 18, 21, 28).

**Указания к составлению уравнений движения.** Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода.

Рассматриваемые механические системы имеют одну степень свободы. Принимая в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi_1$ , приведем уравнения движения к виду

$$\omega_{1z} = \varepsilon_{1z}(\omega_{1z}, \varphi_1); \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}. \quad (2)$$

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Нелинейная система дифференциальных уравнений (2) интегрируется численным методом на интервале времени  $\tau$ . Необходимые для интегрирования начальные условия по переменной  $\varphi_1$  указаны в табл. 10. Начальная уг-

ловая скорость берется близкой к своему среднему значению в периодическом движении. Шаг печати результатов выбирается равным  $\Delta t = \tau/24 = 0,01 + 10^{-4} N$ . На печать выводятся переменные  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\omega_{1z}$ ,  $\varepsilon_{1z}$ . Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения радиусов и масс звеньев, величины  $M_0$ ,  $k$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и т. п. вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения (2) методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы.

**Указания к определению динамических усилий.** Для определения реакции в заданном звене рекомендуется освободить звено от связей, далее с помощью общих теорем динамики составить такое уравнение движения звена, куда вошла бы искомая реакция. Значения переменных  $\varphi_1$ ,  $\omega_{1z}$  и  $\varepsilon_{1z}$  берутся из таблицы результатов интегрирования для момента времени, когда  $\varepsilon_{1z}$  принимает максимальное по модулю значение. Желающие могут вычислить искомую динамическую реакцию на ЭВМ как функцию времени, дополнив соответствующим образом программу.

**Контроль решения.** Графики  $\varphi_1$ ,  $\omega_{1z}$  и  $\varepsilon_{1z}$  не должны иметь разрывов. Начальные и конечные значения переменных  $\omega_{1z}$  и  $\varepsilon_{1z}$  должны достаточно близко совпадать, а угол  $\varphi_1$  — увеличиваться от начального значения на величину, близкую к  $2\pi$ .

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Составить уравнения для определения реакции между пальцем  $A$  кривошипа  $OA$  и прорезью кулисы или реакции какой-либо другой связи.

2. Определить из уравнений движения зависимость  $M_{dz}(t)$ , при которой маховик вращался бы равномерно.

3. Как будет изменяться неравномерность вращения маховика если его момент инерции  $I_1$  увеличивать (например,  $I_1 \rightarrow \infty$ )?

4. По графику  $\omega_{1z}(t)$  найти числовые значения  $\varepsilon_{1z}$  в фиксированные моменты времени и сравнить с результатом счета на ЭВМ.

5. По виду графика  $\omega_{1z}(t)$  оценить приращение величины  $\varphi_1$  за время интегрирования.

6. Объяснить значение каждого оператора в программе.

7. Изменить программу таким образом, чтобы искомая реакция вычислялась на ЭВМ как функция времени.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3$ ,  $N=7$ )

**Постановка задачи.** Кинематическая схема машины с кривошипно-кулисным механизмом изображена на рис. 70, а. Вращающий момент  $M_{dz} = M_0 - k\omega_{3z}$  приложен к шкиву 3. Шкив связан с маховиком ременной передачей. Полезная нагрузка моделируется силой  $F_{Hy} = -\mu_1 v_{5y}$ , приложенной к штоку 5.



Дано:  $OA=r_1=0,06$  м;  $R_1=0,36$  м;  $R_3=0,09$  м;  $R_4=0,24$  м;  $r_4=0,08$  м;  $\rho_4=0,12$  м;  $M_0=-27$  Н·м;  $k=0,214$  Н·м·с;  $\mu_1=309$  Н·с/м;  $I_1=1,8$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_2=15$  кг;  $m_3=7,71$  кг;  $m_4=16$  кг;  $\tau=-0,257$  с;  $\omega_{1z}(0)=24,5$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi_1(0)=1,57$ .

Предполагается, что ремень невесомый, нерастяжимый, не проскальзывающий относительно шкива и маховика. Каток 4 относительно рейки штока 5 и неподвижной рейки не проскальзывает (зубчатая речная передача). Масса штока не учитывается.

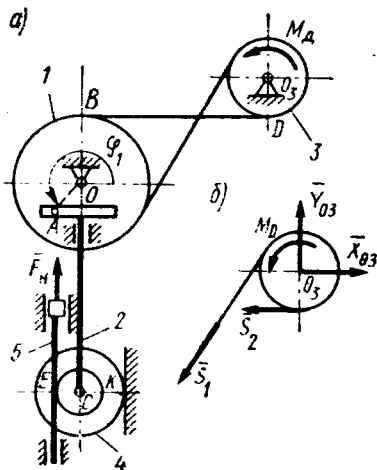


Рис. 70

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения машины. 2. Проинтегрировать уравнения на ЭВМ на интервале времени  $\tau$ . 3. Построить графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\epsilon_{1z}(t)$ . 4. Для момента времени, когда  $\epsilon_{1z}$  принимает максимальное по модулю значение, вычислить разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи.

**Составление уравнений движения.** Уравнения движения составим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, выбрав в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi_1$ , отсчитываемый от горизонтальной оси  $x$  системы координат  $Oxuz$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q. \quad (3)$$

Найдем выражение кинетической энергии как функции  $\varphi_1$  и  $\dot{\varphi}_1$ :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Кинетическая энергия маховика 1, вращающегося вокруг неподвижной оси,  $T_1 = I_1 \omega_{1z}^2 / 2$ .

Кинетическая энергия поступательно движущейся кулисы 2  $T_2 = m_2 v_{Cy}^2 / 2$ .

Кинетическая энергия шкива 3, вращающегося вокруг неподвижной оси,  $T = I_3 \omega_{3z}^2 / 2$ , где  $I_3 = m_3 R_3^2 / 2$ .

Кинетическая энергия катка 4, совершающего плоское движение,  $T_4 = m_4 v_{Cy}^2 / 2 + I_4 \omega_{4z}^2 / 2$ ,  $I_4 = m_4 \rho_4^2$ . Так как шток 5 считается безынерционным, то  $T_5 = 0$ .

Таким образом, кинетическая энергия системы

$$T = I_1 \omega_{1z}^2 / 2 + m_2 v_{Cy}^2 / 2 + m_3 R_3^2 \omega_{3z}^2 / 4 + m_4 v_{Cy}^2 / 2 + m_4 \rho_4^2 \omega_{4z}^2 / 2. \quad (4)$$

Выразим  $v_{Cy}$ ,  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $\omega_{4z}$  через  $\varphi_1$  и  $\dot{\varphi}_1$ . Очевидно,

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1. \quad (5)$$

Так как кулиса движется поступательно, то

$$v_{Cy} = v_{Ay} = \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1. \quad (6)$$

Угловую скорость  $\omega_{3z}$  найдем из уравнения связи для точек  $B$  и  $D$ :

$$v_{Bx} = v_{Dx}.$$

Скорости  $v_{Bx}$  и  $v_{Dx}$  вычисляются в соответствии с графами  $O_1 \xrightarrow{1} B$  и  $O_3 \xrightarrow{3} D$ :

$$-\omega_{1z} R_1 \sin \pi/2 = -\omega_{3z} R_3 \sin 3\pi/2.$$

Отсюда

$$\omega_{3z} = -\omega_{1z} R_1 / R_3. \quad (7)$$

Угловую скорость  $\omega_{4z}$  найдем, используя уравнения связи  $v_{Ky} = 0$  для точки  $K$ . В соответствии с графом  $K \xrightarrow{4} C$ :

$$v_{Cy} = \omega_{4z} R_4 \cos \pi.$$

С учетом (6) получим

$$\omega_{4z} = -\omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 / R_4. \quad (8)$$

Подставим (5), (6), (7), (8) в (4):

$$T = \dot{\varphi}_1^2 [I_1 + m_3 R_1^2 / 2 + (m_2 + m_4 + m_4 \rho_4^2 / R_4^2) r_1^2 \cos^2 \varphi_1] / 2.$$

Для заданных числовых значений параметров кинетическая энергия примет вид

$$T = \dot{\varphi}_1^2 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) / 2. \quad (9)$$

Найдем обобщенную силу  $Q$ . Для этого вычислим сумму мощностей активных сил на возможных скоростях и приравняем ее мощности обобщенной силы:

$$M_{xz} \omega_{3z}^B + F_{Hy} v_{5y}^B + G_{2y} v_{Cy}^B + G_{4y} v_{Cy}^B = Q \omega_{1z}^B. \quad (10)$$

Возможные скорости  $\omega_{1z}^B$ ,  $\omega_{3z}^B$ ,  $v_{Cy}^B$  удовлетворяют уравнениям (6), (7), так как связи стационарные. Уравнение для возможной скорости штока найдем в соответствии с графом  $K \xrightarrow{4} E$ :

$$v_{Ey}^B = v_{5y}^B = \omega_{4z}^B (R_4 + r_4) \cos \pi. \quad (11)$$

Следовательно,  $-M_{xz} \omega_{1z}^B R_1 / R_3 + F_{Hy} \omega_{1z}^B r_1 \cos \varphi_1 (R_4 + r_4) / R_4 + (G_{2y} + G_{4y}) \omega_{1z}^B r_1 \cos \varphi_1 = Q \omega_{1z}^B$ . Отсюда с учетом числовых значений параметров получим

$$Q = 108 - 3,42 \dot{\varphi}_1 - 1,98 \dot{\varphi}_1 \cos^2 \varphi_1 - 20,6 \cos \varphi_1. \quad (12)$$

<sup>1</sup> Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.

Проведем дифференцирование (9) в соответствии с (3):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} 0,126 \sin 2\varphi_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1);$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \ddot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) - 0,126 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1. \quad (13)$$

Подставим (13) в (3):

$$\ddot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) - 0,063 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1 = Q.$$

```

DATA DT,T,F1,OM1/
*0.0107,0.0,1.57,24.5/
DO 12 K=1,25
C1=COS(F1)
D=100-3.42*OM1-1.98*OM1+C1*C1-20.6*C1
E1=(Q+0.063*OM1**2*SIN(F1*2))/
/(2.3+0.126*C1*C1)
PRINT 30731,T
*,F1,OM1,E1,
30731 FORMAT(10B10.3)
F1=F1+OM1*DT
OM1=OM1+E1*DT
!2 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	1.57	24.5	10.5
0.107E-01	1.83	24.6	2.96
0.214E-01	2.10	24.6	-4.88
0.321E-01	2.36	24.6	-10.2
0.482E-01	2.62	24.5	-11.2
0.535E-01	2.88	24.4	-7.82
0.642E-01	3.14	24.3	-9.929
0.749E-01	3.40	24.3	7.75
0.856E-01	3.66	24.4	16.2
0.963E-01	3.93	24.5	22.1
0.107	4.19	24.8	23.5
0.118	4.45	25.0	19.1
0.128	4.72	25.2	9.12
0.139	4.99	25.3	-4.01
0.150	5.26	25.3	-16.5
0.160	5.53	25.1	-24.9
0.171	5.80	24.8	-27.4
0.182	6.07	24.5	-24.1
0.193	6.33	24.3	-16.6
0.203	6.59	24.1	-6.87
0.214	6.85	24.0	2.99
0.225	7.10	24.1	11.0
0.235	7.36	24.2	15.3
0.246	7.62	24.3	14.9
0.257	7.88	24.5	9.91

Отсюда

$$\dot{\omega}_{1z} = (Q + 0,063\dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1) / (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1); \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}. \quad (14)$$

**Вывод уравнений для определения динамических реакций.** Освободим шкив от связей и обозначим силу натяжения ведущей ветви ременной передачи через  $S_1$ , а ведомой — через  $S_2$  (рис. 70, б). Запишем для шкива 3 уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O_3$ :

$$I_3 \dot{\omega}_{3z} = M_{xz} + S_1 R_3 - S_2 R_3.$$

Отсюда с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 = S &= (-M_0 - \\ &- kR_1\omega_{1z}/R_3)/R_3 - \\ &- m_3 R_1 \dot{\omega}_{1z} / 2. \end{aligned} \quad (15)$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Систему уравнений (14) решаем на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе. Применим метод Эйлера с шагом, равным шагу печати  $\Delta t = \tau/24 = 0,0107$  с. На печать выводятся переменные  $t, \varphi_1, \omega_{1z}, \varepsilon_{1z}$ .

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные . . . . .	$t$	$\Delta t$	$\varphi_1$	$\omega_{1z}$	$\varepsilon_{1z}$	$Q$
Обозначения . . . . .	T	DT	F1	OM1	E1	Q

Программа и результаты счета приведены на рис. 71.

По результатам счета на рис. 72 построены графики  $\varphi_1(t)$ ,  $\omega_{1z}(t)$  и  $\varepsilon_{1z}(t)$ .

Вычислим разность сил натяжения ведущей и ведомой ветви ременной передачи. Угловое ускорение маховика принимает максимальное по модулю значение при  $t = 0,171$  с (семнадцатая строка таблицы счета). В этот момент времени угловая скорость  $\omega_{1z} = 24,8 \text{ с}^{-1}$ , угловое ускорение  $\varepsilon_{1z} = -27,4 \text{ с}^{-2}$ . Подставляя числовые значения величин в (15), получим  $S = (27 - 0,214 \cdot 0,36 \times 24,8/0,09) / 0,09 - 7,71 \cdot 0,36 \cdot (-27,4) / 2 = 102 \text{ Н}$ .

**Контроль решения.** Из таблицы счета и графиков на рис. 72 видно, что движение машины близко к периодическому, оговоренному в условиях задачи.

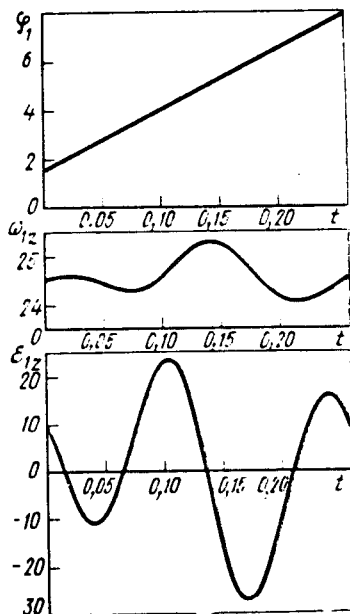


Рис. 72

### РАСЧЕТ Д-5а

Выполнить расчет Д-5 для случая, когда полезная нагрузка определяется кулоновым трением и задается формулами

$$F_{nx} = -F_0 \operatorname{sign} v_{4x}, (F_{ny} = -F_0 \operatorname{sign} v_{4y});$$

$$M_{nz} = -M_0 \operatorname{sign} \omega_{4z}.$$

Значения  $F_0$  (или  $M_0$ ) постоянны по модулю и берутся из табл. 11, остальные значения исходных данных — из табл. 10.

Таблица 11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_0$	425	409	—	—	525	—	—	343	—	440
$M_0$	—	—	98,4	47,6	—	58,2	127	—	127	—
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F_0$	—	347	422	633	965	1092	—	416	1327	—
$M_0$	78,9	—	—	—	—	—	71,5	—	—	40
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$F_0$	853	576	—	—	—	1680	—	808	249	—
$M_0$	—	—	75,3	253	156	—	115	—	—	66,2

### РАСЧЕТ Д-5б

Выполнить расчет Д-5 для случая, когда один ход машины рабочий, а другой — холостой. В этом случае выражения для сил (или момента) нагрузки имеют вид

$$F_{nx} = \begin{cases} F_0, & \text{если } v_{4x} \leq 0; \\ 0, & \text{если } v_{4x} > 0; \end{cases} \quad F_{ny} = \begin{cases} F_0, & \text{если } v_{4y} \leq 0; \\ 0, & \text{если } v_{4y} > 0; \end{cases}$$

$$M_{nz} = \begin{cases} M_0, & \text{если } \omega_{4z} \leq 0; \\ 0, & \text{если } \omega_{4z} > 0. \end{cases}$$

Значения  $F_0$  или  $M_0$  постоянны по величине и берутся из табл. 12, остальные исходные данные — из табл. 10.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_0$	850	818	—	—	1050	—	—	686	—	880
$M_0$	—	—	197	95,2	—	116	254	—	254	—
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F_0$	—	694	844	1266	1930	2184	—	832	2654	—
$M_0$	158	—	—	—	—	—	143	—	—	80
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$F_0$	1706	1152	—	—	—	3360	—	1616	498	—
$M_0$	—	—	151	506	312	—	230	—	—	132

## Динамические реакции в подшипниках ротора

### РАСЧЕТ Д-6

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта исследования роторных машин: вычисление масс-инерционных характеристик ротора, составление дифференциальных уравнений его вращения и уравнений для динамических реакций в подшипниках, исследование уравнений на ЭВМ.

Рассматриваются роторные машины типа турбины, компрессора и т. п. в неустановившемся режиме разгона или выбега.

Варианты схем машин представлены на рис. 73—75. Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими, подшипники  $A, B$  — точечными, ось ротора бесконечно тонкая, совпадающая с осью вращения. Рабочие колеса принимаются однородными дисками. Через  $C_1, C_2, C_3$  на рисунках обозначены центры масс колес, через  $O_1, O_2, O_3$  — точки пересечения оси с ортогональными ей плоскостями, проходящими через центры масс колес. Колеса на оси насажены с технологическими несовершенствами: перекосом второго колеса на угол  $\alpha$ , указанным на рисунках, и смещением  $O_i C_i$  ( $i=1,3$ ) центров масс первого и третьего. Во всех вариантах для простоты принято, что центр масс второго колеса совпадает с осью вращения, а первое и третье колеса насажены без перекоса.

На рисунках введены вращающиеся с ротором ортогональные системы координат:  $Axuz$ , ось  $z$  которой совпадает с осью вращения;  $C_i x_i y_i z_i$ , полученная из  $Axuz$  параллельным переносом в

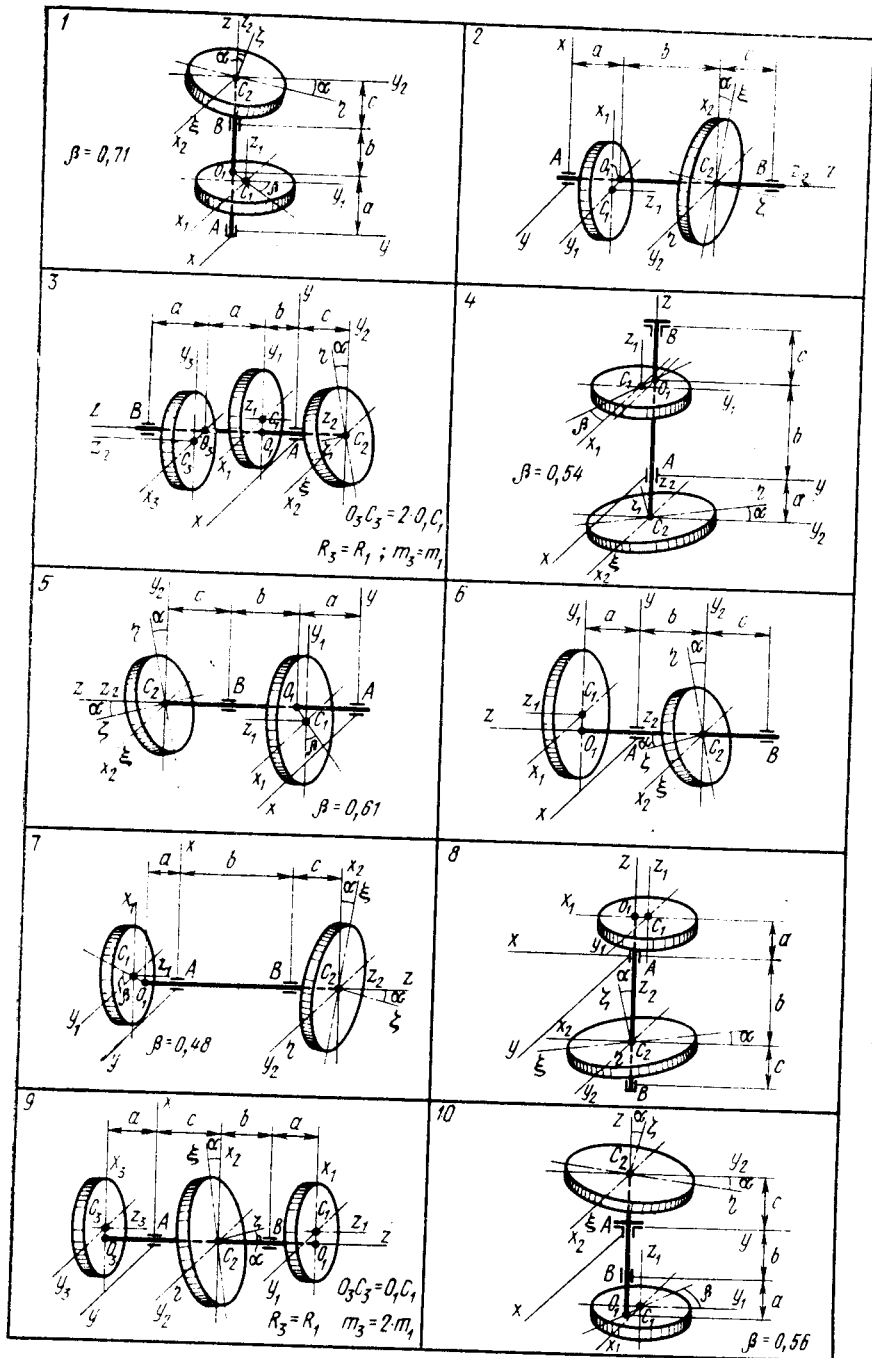


Рис. 73

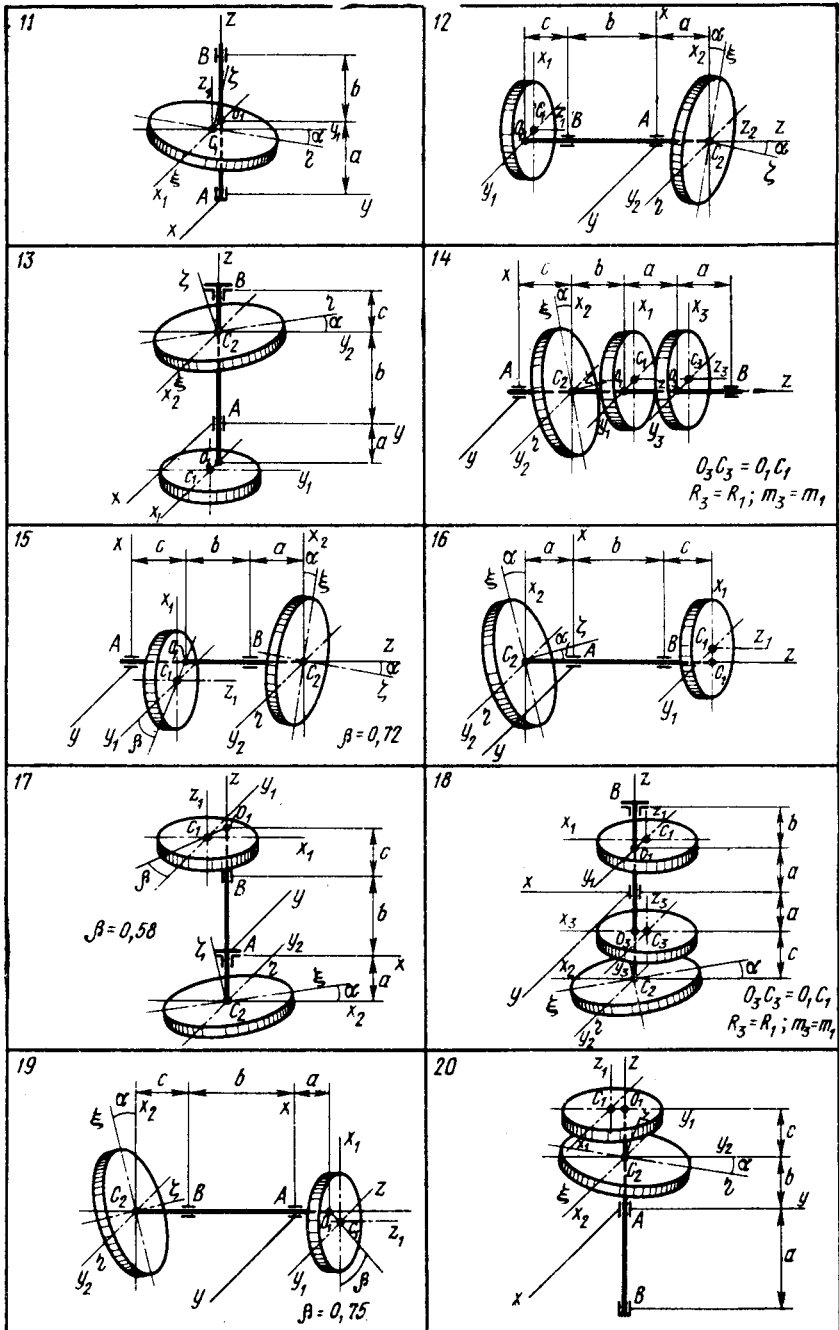


Рис. 74.



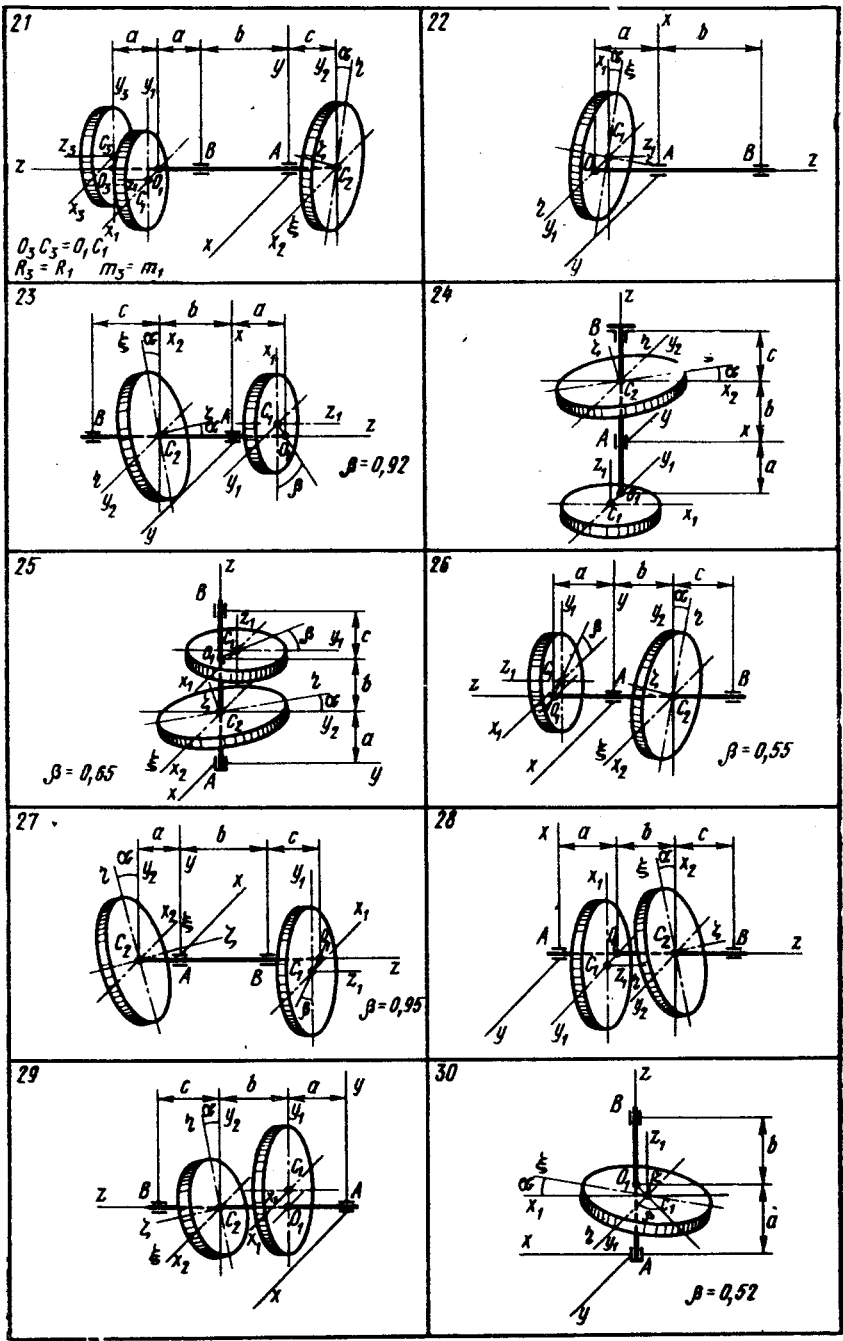


Рис. 75

центры масс соответствующих колес;  $C_2\xi\eta\zeta$ , оси которой совпадают с главными осями инерции второго колеса. Ротор вращается под действием момента  $M_d$  и сопротивления  $M_c$ .

Таблица 13

Варк-ант	$m_{1r}$	$m_{2r}$	$R_1$	$R_2$	$O_1C_1^I$	$a$	$a_r$	$b_r$	$c_r$	$M_{Or}$	$k_{1r}$	$k_{2r}$	$\omega_0$	$\tau$
1	100	90	0,23	0,21	0,2	0,022	0,20	0,20	0,15	12	1,1	0,3	0	5,76
2	80	90	0,27	0,29	0,3	0,018	0,10	0,15	0,10	10	1,2	0,7	990	3,36
3	60	70	0,25	0,30	0,2	0,021	0,12	0,11	0,14	13	1,2	0,2	400	6,72
4	70	80	0,12	0,18	0,1	0,024	0,15	0,20	0,15	8	1,3	0,8	590	1,20
5	80	90	0,21	0,28	0,1	0,028	0,18	0,18	0,14	12	1,6	0,3	0	5,52
6	40	60	0,20	0,18	0,2	0,015	0,11	0,12	0,12	13	1,1	0,9	600	0,96
7	100	120	0,25	0,30	0,5	0,023	0,12	0,45	0,14	12	1,7	0,1	300	9,84
8	80	100	0,21	0,23	0,2	0,026	0,12	0,25	0,12	6	1,1	0,9	500	2,88
9	100	110	0,29	0,30	0,4	0,024	0,14	0,18	0,18	14	1,2	0,2	200	9,84
10	70	90	0,23	0,28	0,2	0,016	0,11	0,22	0,14	10	1,3	0,7	0	4,80
11	160	—	0,31	—	0,3	0,026	0,30	0,28	—	6	1,2	1,2	600	3,60
12	60	80	0,24	0,28	0,2	0,018	0,10	0,25	0,10	15	1,4	0,1	400	5,76
13	40	50	0,15	0,18	0,1	0,015	0,08	0,15	0,09	9	1,5	0,5	0	1,44
14	80	90	0,26	0,30	0,2	0,022	0,10	0,10	0,10	8	1,3	0,9	500	6,24
15	90	70	0,16	0,28	0,1	0,019	0,11	0,16	0,15	7	1,2	0,4	0	5,04
16	30	40	0,21	0,25	0,2	0,020	0,08	0,22	0,09	13	1,1	0,5	800	1,44
17	70	80	0,20	0,28	0,4	0,026	0,11	0,30	0,08	11	1,3	0,2	0	6,00
18	30	50	0,18	0,21	0,3	0,021	0,10	0,10	0,09	9	1,6	0,5	0	2,16
19	60	70	0,17	0,19	0,2	0,023	0,08	0,25	0,08	30	1,5	0,2	0	1,92
20	50	70	0,14	0,17	0,3	0,024	0,28	0,08	0,08	12	1,7	0,9	800	0,72
21	40	60	0,23	0,26	0,3	0,018	0,07	0,27	0,09	10	1,2	0,8	500	2,88
22	90	—	0,31	—	0,4	0,025	0,10	0,25	—	10	1,6	1,5	580	1,68
23	60	70	0,25	0,30	0,2	0,022	0,12	0,15	0,15	18	1,1	0,2	0	6,00
24	30	50	0,28	0,31	0,3	0,027	0,10	0,16	0,16	10	1,2	0,2	0	5,04
25	40	50	0,23	0,24	0,1	0,019	0,12	0,12	0,12	5	1,4	0,8	400	2,16
26	30	40	0,18	0,19	0,1	0,015	0,11	0,16	0,15	26	1,3	0,1	600	1,20
27	40	30	0,20	0,17	0,1	0,018	0,08	0,25	0,07	19	1,5	1,6	600	0,48
28	50	50	0,22	0,22	0,3	0,024	0,12	0,10	0,12	5	1,2	1,3	490	1,20
29	50	40	0,18	0,15	0,2	0,017	0,11	0,12	0,12	6	1,3	0,8	500	0,96
30	100	—	0,35	—	0,3	0,023	0,18	0,18	—	3	1,1	1,6	400	3,36

Исходные данные определяются по формулам (1) и табл. 13:

$$M_{xz} = M_0 - k_1 \omega_z; \quad k_1 = k_{1r} + 0,01N; \quad M_{cz} = -k_2 \omega_z^2;$$

$$M_0 = M_{Or} (1 + 0,01n) 10^2; \quad m_i = m_{ir} (1 + 0,01N);$$

$$O_1C_1 = O_1C_1^I (1 + 0,01N) 10^{-3}; \quad k_2 = k_{2r} (1 + 0,01N) 10^{-2};$$

$$a = a_r + 0,001n; \quad b = b_r + 0,001N;$$

$$c = c_r + 0,001n.$$

(1)

Требуется исследовать движение ротора и динамические реакции в подшипниках. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к вычислению масс-инерционных характеристик ротора.** Масса ротора  $m$  определяется как сумма масс всех его колес.

Координаты  $x_{C_i}$ ,  $y_{C_i}$  центров масс  $C_i$  колес в системе координат  $Axyz$  определяются в соответствии с рисунком. Координаты  $x_C$ ,  $y_C$  центра масс ротора находятся по формулам

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_{C_i}}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_{C_i}}{m}. \quad (2)$$

(Для ряда вариантов часть величин  $m_i$  в (2) равна нулю.)

В осях симметрии  $C_i x_i y_i z_i$  для колес 1, 3 и осях  $C_2 \xi \eta \zeta$  для колеса 2 вычисляются числовые значения инерционных моментов и полярного момента инерции. Тензоры инерции  $I_1^{(1)}$ ,  $I_0^{(2)}$ ,  $I_3^{(3)}$  колес в этих осях будут диагональными. Тензор инерции колеса 2 в осях  $C_2 x_2 y_2 z_2$  вычисляется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \gamma I_0^{(2)} \gamma^T. \quad (3)$$

В (3) через  $\gamma$  обозначена матрица направляющих косинусов между осями трехгранников  $C_2 \xi \eta \zeta$  и  $C_2 x_2 y_2 z_2$ , а через  $\gamma^T$  — транспонированная матрица. Компоненты тензоров  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ ,  $I^{(3)}$  колес в осях  $Axyz$  вычисляются затем с помощью формул пересчета при параллельном переносе [16]. Тензор инерции ротора  $I$  в осях  $Axyz$  получается, если сложить тензоры колес:  $I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}$ .

**Указания к составлению уравнений.** Уравнения вращательного движения и уравнения для динамических реакций составляются по [3]. В качестве координатного трехгранника, в осях которого записываются теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента, выбирается система  $Axyz$ .

После исключения статических составляющих находим:

$$X_B = X_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}); \quad Y_B = Y_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (4)$$

$$X_A = f_1(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - X_B; \quad Y_A = f_2(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - Y_B, \quad (5)$$

где  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$  — соответствующие проекции динамических составляющих реакции;  $\varphi$  — угол поворота ротора. Уравнение кинетического момента по оси  $z$  дает

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = M_{xz} + M_{cz}. \quad (6)$$

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Уравнение (6) приводится к форме Коши по переменной  $\omega_z = \dot{\varphi}$ :

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \quad \varepsilon_z = (M_{xz} + M_{cz}) / I_{zz}. \quad (7)$$

Уравнение (7) интегрируется при заданном начальном условии  $\omega_z(0)$  на интервале времени  $\tau$ . Шаг печати выбирается равным  $\Delta t = \tau/24$ . Одновременно с интегрированием вычисляются динамические реакции по уравнениям (4), (5).

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнение (7) интегрируется по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен ниже в примере. Студентам, имеющим навыки программи-

рования, рекомендуется интегрировать уравнение (7), используя стандартную программу метода Рунге — Кутты.

**Контроль решения.** График функции  $\omega_z(t)$  должен стремиться с ростом времени к установившемуся значению  $\omega_z^*$ . Последнее находится аналитически из уравнений (7) при  $\varepsilon_z = 0$ .

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Назвать размерность величин  $I_{xx}, I_{xy}, \dots$
2. Вычислить тензор инерции тела, состоящего из двух материальных точек, связанных невесомыми стержнями. Массы и координаты точек заданы.
3. Какие дополнительные вычисления следовало бы провести, если бы центр масс колеса 2 не лежал на оси  $z$ ?
4. Как изменятся уравнения системы в осях координатного трехгранника, начало которого не совпадает с точкой  $A$ ?
5. Проинтегрировать уравнение (7) аналитически.
6. Проинтегрировать аналитически уравнение (7) для случая  $k_2 = 0$ .
7. Как изменится график  $\omega_z(t)$ , если изменить начальные условия?
8. По графику  $\omega_z(t)$  качественно построить график  $\dot{\omega}_z(t)$ .
9. Оценить непосредственно из уравнений значения  $R_A, R_B$  при  $t \rightarrow \infty$ .
10. Объяснить поведение векторов реакций  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  в неподвижном пространстве.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3, N=7$ )

**Постановка задачи.** Рассматривается переходный режим вращения ротора турбины после увеличения нагрузки. Значение враща-

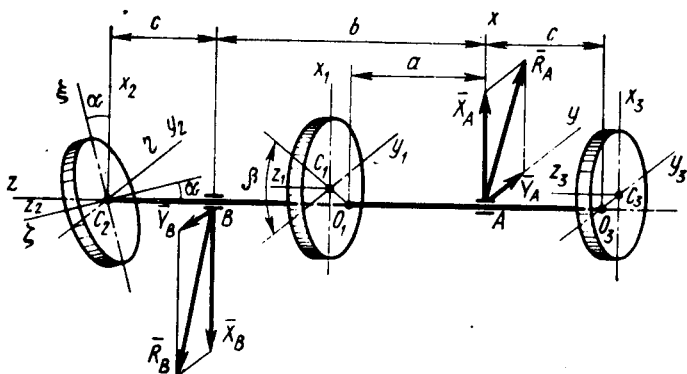


Рис. 76

ющего момента  $M_{Dz} = M_0 - k_1 \omega_z$ . Момент сопротивления  $M_{Cz} = -k_2 \omega_z^2$ . Схема ротора приведена на рис. 76.

Дано:  $M_0 = 1950 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $k_1 = 1,57 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;  $k_2 = 0,039 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;

$m_1=47$  кг;  $m_2=57$  кг;  $m_3=37$  кг;  $R_1=0,17$  м;  $R_2=0,2$  м;  $R_3=0,15$  м;  $O_1C_1=4 \cdot 10^{-4}$  м;  $O_3C_3=3 \cdot 10^{-4}$  м;  $\alpha=0,019$  рад;  $\beta=0,68$  рад;  $a=0,133$  м;  $b=0,267$  м;  $c=0,093$  м;  $\omega_z(0)=600$  рад/с;  $\tau=0,48$  с;  $\Delta t=0,02$  с.

Требуется: 1. Определить в осях  $Axyz$  координаты центра масс  $S$  ротора и его тензор инерции. 2. Составить уравнение вращательного движения ротора и уравнения для определения динамических реакций в подшипниках. 3. С помощью ЭВМ проинтегрировать уравнение движения для заданных начальных условий на интервале времени  $\tau$  и определить изменение во времени динамических реакций. 4. Построить графики  $\omega_z(t)$ ,  $\varepsilon_z(t)$ ,  $R_A(t)$ . 5. Для момента времени  $t=\Delta t(N+1)=0,16$  с изобразить векторы динамических реакций на рисунке.

**Вычисление масс-инерционных характеристик ротора.** Масса ротора определяется как сумма масс колес:  $m=m_1+m_2+m_3=47+57+37=141$  кг. Координаты центров масс  $C_i$  в системе координат  $Axyz$  в соответствии с рис. 96

$$C_1(2,52 \cdot 10^{-4}; -3,12 \cdot 10^{-4}; 0,133);$$

$$C_2(0; 0; 0,36); C_3(0; 3 \cdot 10^{-4}; -0,093).$$

Координаты  $x_c, y_c$  центра масс ротора находят по формулам:

$$x_c = \sum_i m_i x_{c_i} / m; \quad y_c = \sum_i m_i y_{c_i} / m.$$

Отсюда  $x_c=0,837 \cdot 10^{-4}$  м;  $y_c=-0,255 \cdot 10^{-4}$  м.

Тензор инерции  $i$ -го диска в осях  $C_i x_i y_i z_i$  ( $i=1,3$ )

$$I_i^{(i)} = \frac{m_i R_i^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Аналогичный вид имеет тензор  $I_0^{(2)}$  диска 2 в осях  $C_2 \xi \eta \zeta$ . В осях  $C_2 x_2 y_2 z_2$  его тензор инерции  $I_2^{(2)}$  определяется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \gamma I_0^{(2)} \gamma^T.$$

Здесь  $\gamma$  — матрица направляющих косинусов между осями трехгранников  $C_2 \xi \eta \zeta$  и  $C_2 x_2 y_2 z_2$ ;  $\gamma^T$  — транспонированная матрица.

Трехгранник  $C_2 x_2 y_2 z_2$  повернут на угол  $\alpha$  против часовой стрелки относительно трехгранника  $C_2 \xi \eta \zeta$  вокруг оси  $\eta$ , совпадающей с осью  $y_2$ . В этом случае матрица  $\gamma$  такова:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Так как угол  $\alpha$  мал, то будем далее пренебрегать величинами вто-

рого и более высокого порядка малости по  $\alpha$ . Тогда  $\cos \alpha = 1$ ,  
 $\sin \alpha = \alpha$ ,

$$I_2^{(2)} = \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Компоненты тензоров инерции колес в осях трехгранника  $Axyz$  находят по формулам пересчета при параллельном переносе осей. Тензор инерции системы

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}.$$

Выпишем необходимые для решения задачи компоненты тензора инерции системы в осях  $Axyz$ :

$$I_{xz} = m_1 x_{C_1} z_{C_1} + m_3 x_{C_3} z_{C_3} + \alpha m_2 R_2^2 / 4 = \\ = 47 \cdot 2,52 \cdot 10^{-4} \cdot 0,133 + 0,019 \cdot 57 \cdot 0,2^2 / 4 = 0,0124 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{yz} = m_1 y_{C_1} z_{C_1} + m_3 y_{C_3} z_{C_3} = 47(-3,12 \cdot 10^{-4}) 0,133 + \\ + 37 \cdot 3 \cdot 10^{-4} (-0,093) = -0,003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

При вычислении  $I_{zz}$  слагаемыми с множителем  $(O_i C_i)^2$  пренебрегаем:

$$I_{zz} = m_1 R_1^2 / 2 + m_2 R_2^2 / 2 + m_3 R_3^2 / 2 = \\ = (47 \cdot 0,17^2 + 57 \cdot 0,2^2 + 37 \cdot 0,15^2) / 2 = 2,24 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

**Составление уравнений.** Дифференциальное уравнение вращения ротора и уравнения для определения динамических реакций подшипников в осях трехгранника  $Axyz$  имеют такой вид:

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = M_{Dz} + M_{Cz}; \quad (8)$$

$$-m y_C \ddot{\varphi} - m x_C \dot{\varphi}^2 = X_A + X_B;$$

$$m x_C \ddot{\varphi} - m y_C \dot{\varphi}^2 = Y_A + Y_B;$$

$$-I_{xz} \ddot{\varphi} + I_{yz} \dot{\varphi}^2 = -z_B Y_B;$$

$$-I_{yz} \ddot{\varphi} - I_{xz} \dot{\varphi}^2 = z_B X_B. \quad (9)$$

Запишем (8) в форме Коши, введя переменную  $\omega_z = \dot{\varphi}$ :

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \quad \varepsilon_z = (M_0 - k_1 \omega_z - k_2 \omega_z^2) / I_{zz}. \quad (10)$$

Подставим в уравнения (9) числовые значения параметров и решим эти уравнения относительно искомых реакций:

$$\begin{aligned} X_B &= (0,003\varepsilon_z - 0,0124\omega_z^2)/0,267; \\ Y_B &= -(0,0124\varepsilon_z + 0,003\omega_z^2)/0,267; \\ X_A &= 0,0036\varepsilon_z - 0,0118\omega_z^2 - X_B; \\ Y_A &= 0,0118\varepsilon_z + 0,0036\omega_z^2 - Y_B. \end{aligned} \quad (11)$$

Значения реакций находят по формулам

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (12)$$

```

DATA DT,T,OM1/0.002,0.,600./
DO 12 K=1,241
E1=(1950-1.57*OM1-0.039*OM1**2)/2.24
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
XB=(0.003*E1-0.0124*OM1**2)/0.267
YB=-(.0124*E1+0.003*OM1**2)/0.267
XA=0.0036*E1-0.0118*OM1**2-XB
YA=0.0118*E1+0.0036*OM1**2-YB
RA=SQRT(XA**2+YA**2)
RB=SQRT(XB**2+YB**2)
PRINT 30731,T
:      ,OM1,E1,XA,YA,XB,YB,RA,RB
30731 FORMAT(F8.3,8F8.0)
2 OM1=OM1+E1*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	600.	-5818.	12516.	5002.	-16784.	-3775.	13478.	17204.
0.02	503.	-3885.	8790.	3526.	-11708.	-2661.	9471.	12085.
0.04	436.	-2750.	6615.	2664.	-8872.	-2011.	7132.	9097.
0.06	380.	-2027.	5239.	2119.	-7026.	-1600.	5651.	7205.
0.08	352.	-1539.	4315.	1753.	-5787.	-1324.	4658.	5936.
0.10	325.	-1196.	3667.	1497.	-4917.	-1131.	3961.	5046.
0.12	303.	-945.	3196.	1311.	-4286.	-990.	3455.	4399.
0.14	286.	-757.	2845.	1172.	-3815.	-886.	3077.	3916.
0.16	273.	-613.	2577.	1066.	-3456.	-806.	2789.	3548.
0.16	273.	-613.	2577.	1066.	-3456.	-806.	2789.	3548.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0.46	210.	-44.	1528.	652.	-2049.	-493.	1661.	2107.
0.48	209.	-38.	1516.	647.	-2032.	-490.	1648.	2091.

Рис. 77

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Вычисления в силу уравнений (10), (11), (12) выполним на ЭВМ. Для интегрирования дифференциального уравнения (10) применим метод Эйлера с шагом  $\delta t = \tau/240 = 0,002$  с. Один из возможных вариантов программы приведен на рис. 77.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные	. .	$t$	$\delta t$	$\varepsilon_z$	$\omega_z$	$X_A$	$Y_A$	$X_B$	$Y_B$	$R_A$	$R_B$
Обозначения	. .	T	DT	E1	OM1	XA	YA	XB	YB	RA	RB

На печать выводятся переменные  $t$ ,  $\omega_z$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  с шагом, равным  $\Delta t$ .

Результаты счета (см. рис. 77) представлены графиками  $\omega_z(t)$ ,  $\varepsilon_z(t)$ ,  $R_A(t)$  на рис. 78. Для момента времени  $t=0,16$  с на рис. 76 построены векторы  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ .

**Контроль решения.** Найдем скорость установившегося вращения. Приравнявая правую часть (10) нулю, получим  $M_0 - k_1\omega_z - k_2\omega_z^2 = 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned}
 (\omega_z)_{1,2} &= \\
 &= \frac{-1,57 \pm \sqrt{1,57^2 + 4 \cdot 0,039 \cdot 1950}}{2 \cdot 0,039} = \\
 &= -20,1 \pm 224.
 \end{aligned}$$

Так как по условию задачи ротор не изменяет направления вращения, то в качестве установившегося значения угловой скорости возьмем положительное значение корня  $\omega_z^* = 204$  рад/с. Приближение с ростом  $t$  кривой  $\omega_z(t)$  к  $\omega_z^*$  (рис. 78) указывает на правильность решения задачи.

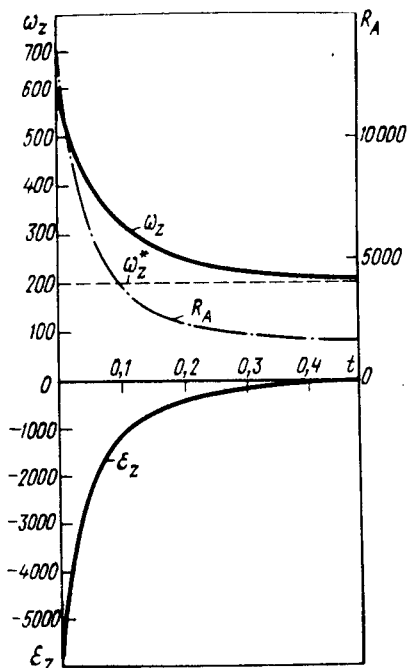


Рис. 78

### Движение системы с двумя степенями свободы относительно положения равновесия

#### РАСЧЕТ Д-7

**Описание задания.** Цель расчета — приобретение опыта составления и исследования уравнений движения голономных механических систем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. Аналитически определяют положение равновесия системы, с помощью ЭВМ находят ее движение относительно этого положения, определяют динамические реакции.



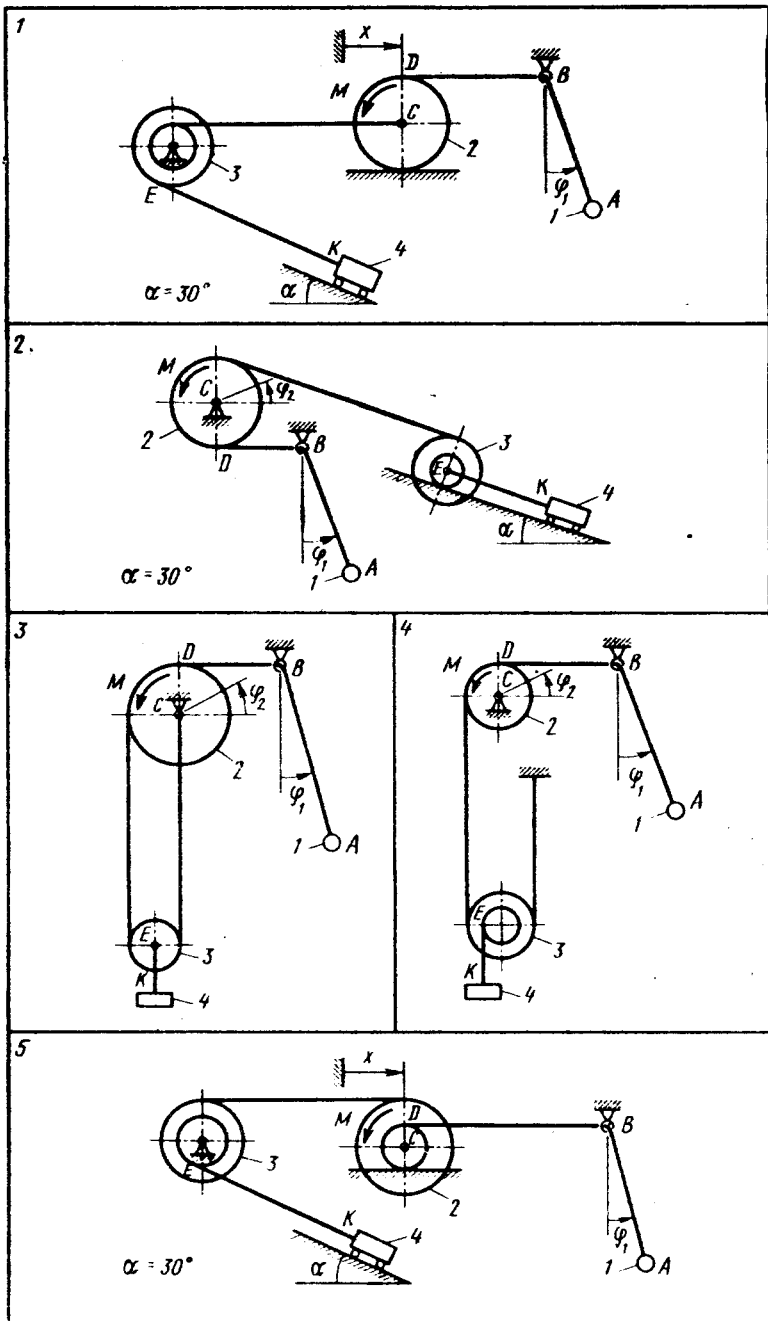


Рис. 79

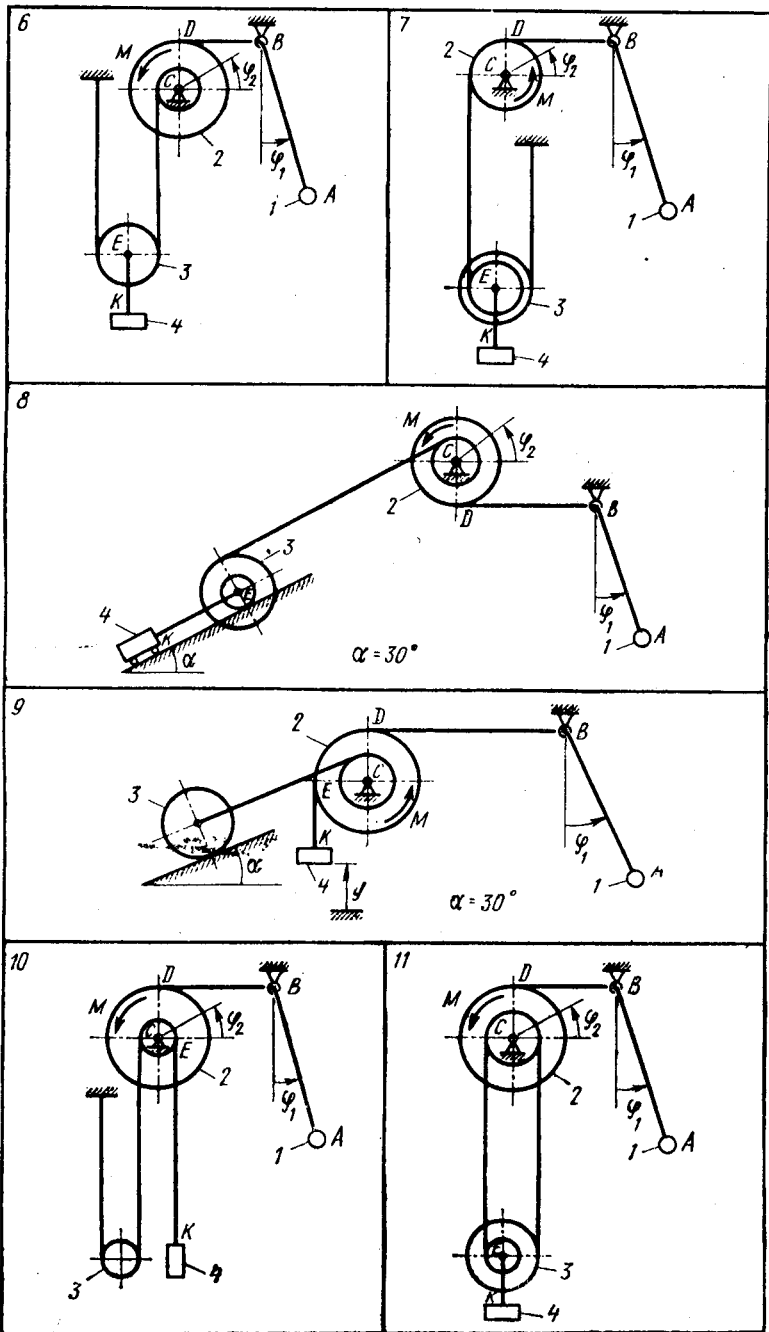


Рис. 80

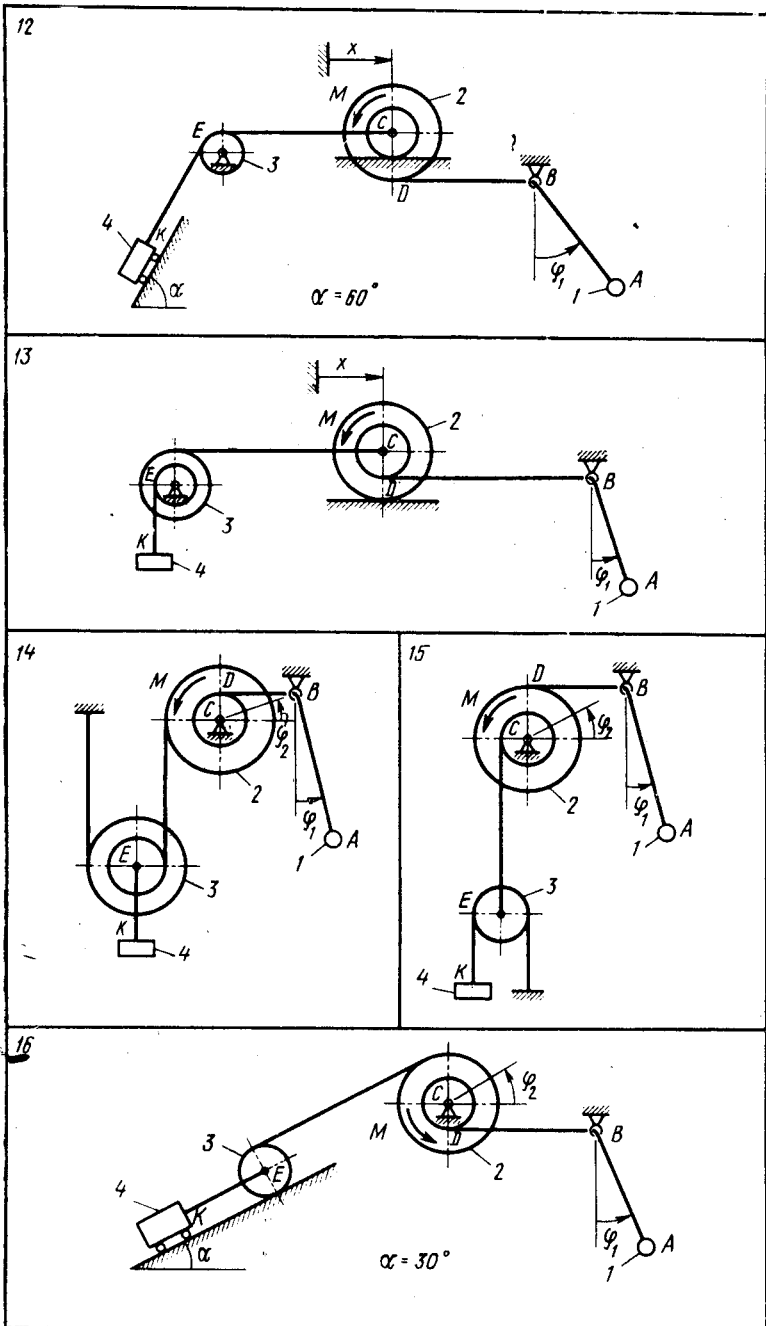


Рис. 81

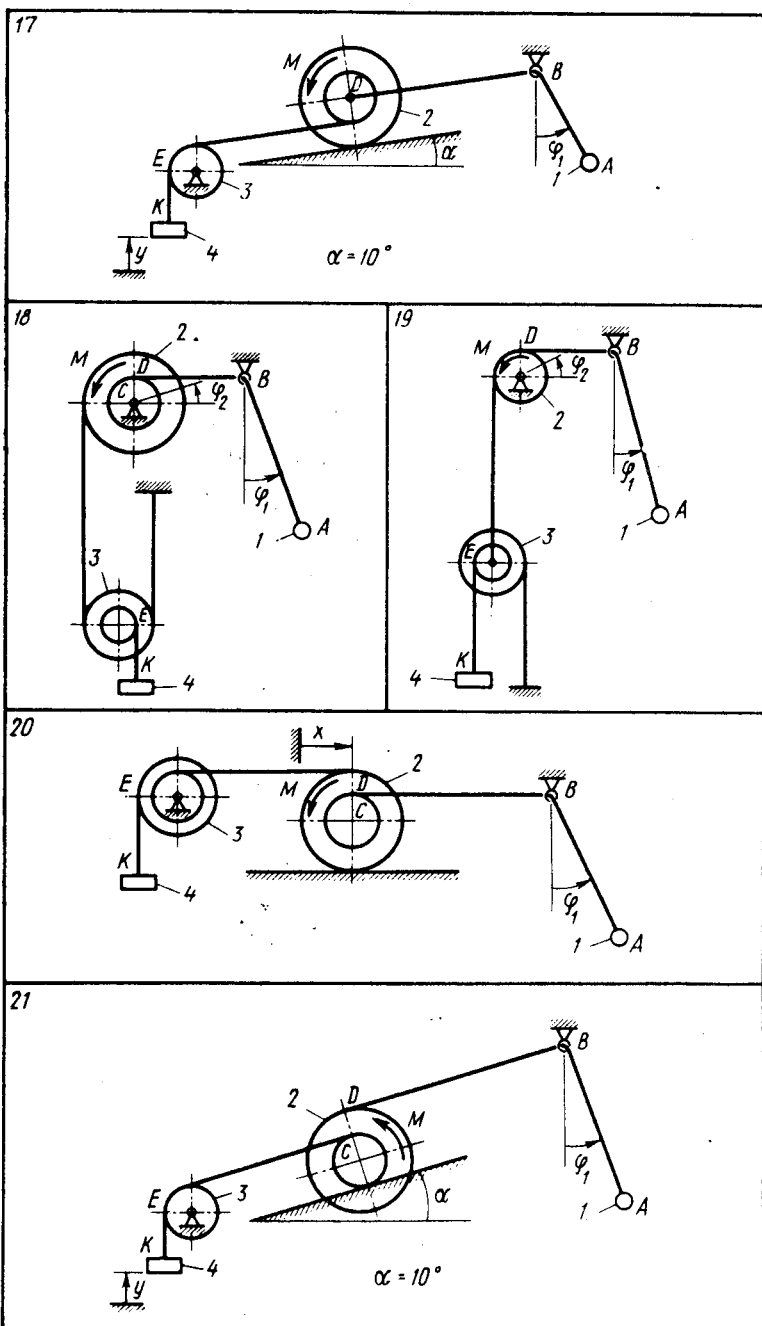


Рис. 82

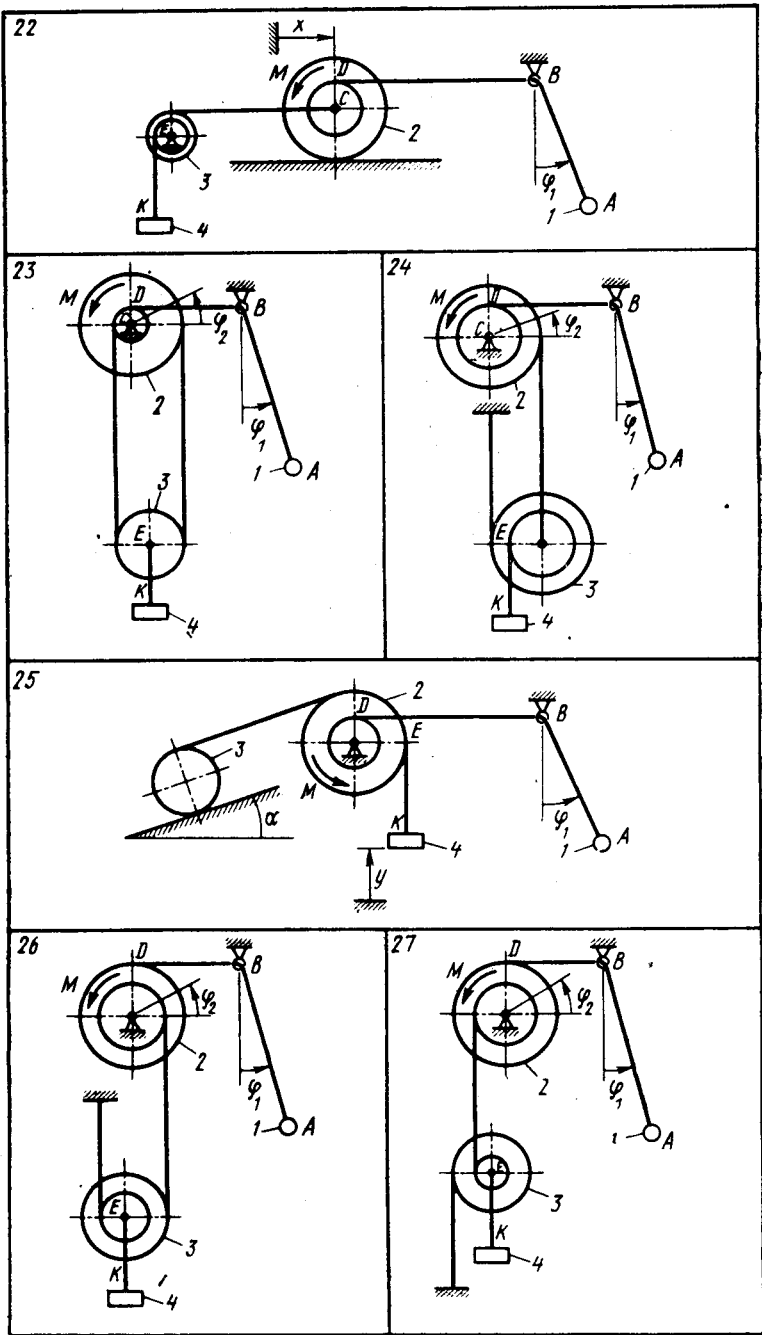


Рис. 83

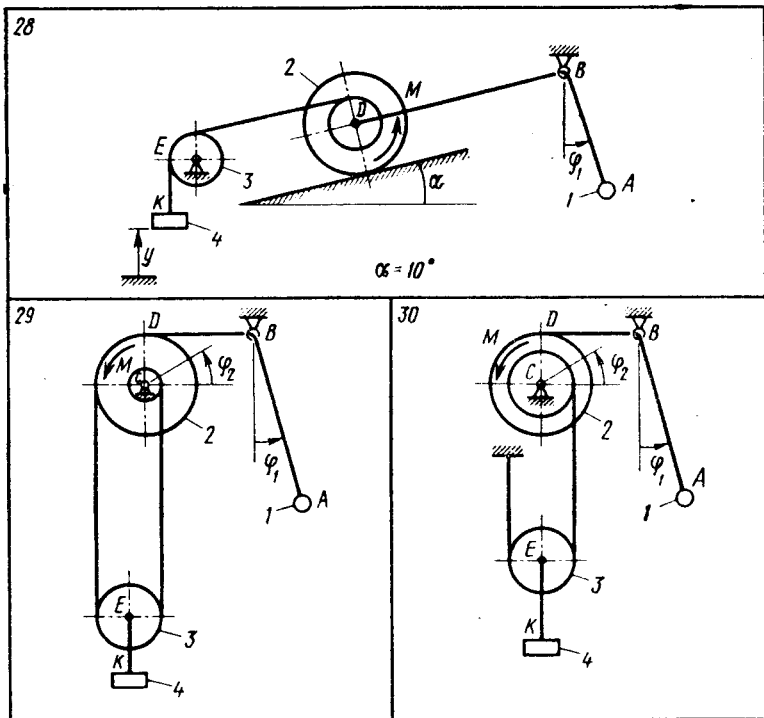


Рис. 84

Варианты механических систем представлены на рис. 79—84. Шкивы и катки считаем абсолютно жесткими, нити — нерастяжимыми. Проскальзывание катков в точках опоры отсутствует. Нить в точке  $B$  пропущена через кольцо пренебрежимо малых размеров. Трение в кольце и осях шкивов не учитываем. Груз 1 точечный, груз 4 движется поступательно. Активными силами являются заданные вес и момент  $\bar{M}$ , определяемый из условия равновесия системы.

Исходные данные определяют по формулам (1) и табл. 14:

$$m_1 = 100 + n; \quad m_2 = m_{2r} + n;$$

$$m_3 = m_{3r} + N; \quad m_4 = 100 + N;$$

$$R_2 = R_{2r} + 0,01N; \quad \tau = 2,4(1 + 0,01N). \quad (1)$$

Через  $l_0$  обозначена начальная длина нити  $AB$ . Катки, шкивы, блоки, для которых радиус инерции не указан, считаются однородными дисками.

Требуется: 1. Найти из условий равновесия момент  $\bar{M}$ . 2. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движе-

ния системы. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к составлению уравнений движения и уравнений для определения динамических реакций.** Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. Рассматриваемые механические системы имеют две степени свободы. В качестве

Таблица 14

Вариант	$m_{2r}$	$m_{3r}$	$R_{2r}$	$r_2$	$\rho_2$	$R_3$	$r_3$	$\rho_3$	$l_0$	$q_1(0)$	$\dot{q}_1(0)$	$\dot{q}_2(0)$
1	80	30	0,3	—	—	0,24	0,12	0,10	1,01	0,3	0	0,02
2	70	90	0,2	—	—	0,27	0,09	0,12	1,02	-0,2	0,4	0,09
3	50	20	0,2	—	—	—	—	—	1,03	0	0,7	-0,08
4	30	40	0,1	—	—	0,15	0,05	0,10	1,04	0,2	-0,5	-0,16
5	60	30	0,2	0,12	0,12	0,20	0,10	0,11	1,05	0,1	0,7	0,02
6	50	20	0,3	0,15	0,16	—	—	—	1,06	0	0,8	-0,08
7	30	30	0,1	—	—	0,12	0,10	0,09	1,07	0,3	0	-0,14
8	40	60	0,2	0,12	0,11	0,22	0,12	0,13	1,08	0	-0,8	0,09
9	60	70	0,3	0,15	0,14	—	—	—	1,09	-0,2	0,3	0
10	70	50	0,3	0,12	0,13	—	—	—	1,10	0,2	-0,5	-0,09
11	60	30	0,2	0,11	0,12	0,14	0,08	0,09	1,11	-0,3	0	-0,12
12	80	10	0,3	0,14	0,16	—	—	—	1,12	-0,2	-0,4	-0,03
13	50	20	0,2	0,12	0,11	0,12	0,08	0,08	1,13	0,1	-0,7	0,05
14	40	40	0,2	0,10	0,12	0,18	0,10	0,11	1,14	0,2	0,5	0,12
15	50	20	0,3	0,12	0,14	—	—	—	1,15	0,3	0,1	0,10
16	60	40	0,2	0,10	0,12	—	—	—	1,16	-0,1	0,6	-0,09
17	80	10	0,3	0,12	0,15	—	—	—	1,17	-0,2	0,4	0,03
18	70	20	0,3	0,15	0,18	0,16	0,08	0,09	1,18	0	-0,8	0,12
19	20	30	0,1	—	—	0,18	0,08	0,10	1,19	0,1	0,7	0,16
20	50	20	0,3	0,14	0,16	0,16	0,12	0,10	1,20	0,2	0,5	-0,04
21	70	10	0,3	0,16	0,21	—	—	—	1,21	0,2	-0,5	-0,05
22	70	20	0,3	0,18	0,22	0,12	0,08	0,09	1,22	0,1	-0,6	-0,06
23	60	20	0,3	0,12	0,20	—	—	—	1,23	-0,2	-0,4	0,18
24	50	30	0,3	0,20	0,22	0,22	0,18	0,12	1,24	-0,2	0,5	0,16
25	40	80	0,2	0,15	0,14	—	—	—	1,25	0,3	-0,1	0,08
26	50	30	0,2	0,14	0,13	0,18	0,06	0,08	1,26	-0,3	0	0,12
27	60	20	0,2	0,16	0,14	0,16	0,12	0,10	1,27	0,1	0,6	0,16
28	60	10	0,3	0,10	0,16	—	—	—	1,28	0	0,7	-0,06
29	40	20	0,3	0,12	0,18	—	—	—	1,29	0,2	-0,5	0,18
30	50	20	0,2	0,16	0,12	—	—	—	1,30	0,3	-0,1	0,15

обобщенной координаты  $q_1$  во всех вариантах выбирается угол  $\varphi_1$  отклонения нити  $AB$  от вертикали. В качестве координаты  $q_2$  в вариантах 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 29, 30 выбирается угол  $\varphi_2$  поворота шкива 2, в вариантах 1, 5, 12, 13, 20, 22 — координата  $x$  центра  $C$  катка 2, в вариантах 9, 17, 21, 25, 28 — координата  $y$  груза 4. Координаты  $\varphi_2$ ,  $x$ ,  $y$  отсчитываются от их начального положения.

Уравнения движения приводятся к виду Коши:

$$\frac{dp_j}{dt} = f_j(p_1, p_2, q_1, q_2); \quad \frac{dq_j}{dt} = p_j \quad (j=1,2). \quad (2)$$

Для определения динамических реакций рекомендуется освободить систему от связей и с помощью общих теорем динамики составить такие уравнения движения, куда вошли бы искомые реакции.

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Система дифференциальных уравнений (2) и уравнения для определения динамических реакций решаются на ЭВМ. Необходимые для интегрирования начальные условия по переменным  $q_1, p_1, p_2$  указаны в табл. 14. Начальное значение по переменной  $q_2$  принимается равным нулю. Шаг печати  $\Delta t$  принимается равным  $\Delta t = \tau/24 = 0,1 + 0,001 N$ . На печать выводятся переменные  $t, q_1, q_2, p_1, p_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2$  и искомая реакция. Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения масс и размеров звеньев тригонометрических функций угла и т. п. вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором интегрирование дифференциальных уравнений производится методом Эйлера с шагом  $\delta t = \Delta t/10$ , рассмотрен ниже в примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать дифференциальные уравнения методом Рунге — Кутты, используя библиотечные подпрограммы, организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов и т. д.

**Контроль решения.** Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. Начальные условия и числовые значения параметров задаются таким образом, что движение по координате  $\varphi_1$  имеет колебательный характер с периодом, близким к  $\tau$ .

**Защита расчета.** Типовые вопросы:

1. Как изменяются уравнения, если на окружности тела 2 дополнительно прикрепить материальную точку массы  $m$ ?

2. Как изменятся уравнения, если к телу 3 будет дополнительно приложен момент  $\bar{M}_3$ ; если к заданной точке системы будет дополнительно приложена сила  $\bar{F}$ ?

3. Почему решение  $\varphi_1 = \pi$  уравнений  $Q_1 = 0, Q_2 = 0$  не определяет положения равновесия?

4. Найти натяжение указанного участка нити, реакцию указанной связи.

5. Какой вид примут уравнения движения системы, если дополнительными связями остановить движение тела 2?

6. Какой вид примут уравнения движения системы, если точка 1 будет скользить без трения по наклонной плоскости, проходящей через точку  $B$  под углом  $\varphi_1 = \text{const}$  к вертикали?

7. По виду графика  $q_2(t)$  построить график  $p_2(t) = \dot{q}_2$ .

8. Объяснить операторы программы.

#### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31,  $n=3, N=7$ )

**Постановка задачи.** В механической системе (рис. 85) точечный груз 1 прикреплен к нити, пропущенной через кольцо  $B$ . Каток 2



движется без скольжения. Нити нерастяжимые, невесомые. Трение в кольце, в оси шкива 3 и между наклонной плоскостью и грузом 4 не учитывается.

В качестве обобщенных координат выбираем угол  $\varphi_1$  отклонения нити  $AB$  от вертикали и координату  $x$  центра  $C$  катка 2, отсчитываемую от его начального положения.

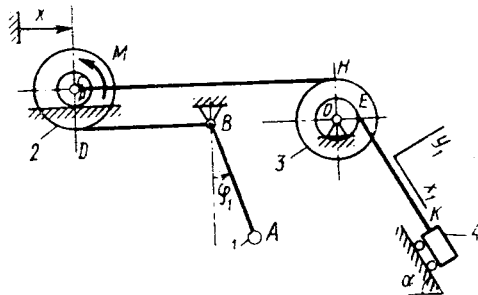


Рис. 85

Дано:  $m_1=103$  кг;  $m_2=63$  кг;  $m_3=27$  кг;  $m_4=107$  кг;  $l_0=1,31$  м;  $R_2=0,27$  м;  $r_2=0,114$  м;  $\rho_2=0,12$  м;  $R_3=0,15$  м;  $r_3=0,1$  м;  $\rho_3=0,1$  м;  $\tau=2,57$  с;  $\Delta t=0,107$  с;  $\varphi_1(0)=0$ ;  $x(0)=0$ ;  $\dot{\varphi}_1(0)=0,75$  с $^{-1}$ ;  $\dot{x}(0)=0$ .

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

и уравнение для определения натяжения  $S_4$  нити  $KE$ . 2. Найти из условий равновесия системы в обобщенных координатах момент  $\bar{M}$ . 3. Для найденного значения  $\bar{M}$  и заданных начальных условий решить полученные уравнения на ЭВМ на интервале времени  $\tau$ . 4. Построить графики  $\varphi_1(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\dot{\varphi}_1(t)$ ,  $S_4(t)$ . 5. Для момента времени, когда нить  $AB$  в первый раз проходит через вертикальное положение  $\varphi_1=0$ , определить ее натяжение  $S_1$ .

Составление уравнений движения и уравнения для определения натяжения нити. Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (3)$$

Найдем выражение кинетической энергии системы как функции обобщенных координат и скоростей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4)$$

Здесь кинетическая энергия точечного груза 1

$$T_1 = m_1 v_A^2 / 2.$$

Кинетическая энергия катка 2

$$T_2 = m_2 v_{Cx}^2 / 2 + I_2 \omega_{2z}^2 / 2; \quad I_2 = m_2 \rho_2^2.$$

Кинетическая энергия шкива 3

$$T_3 = I_3 \omega_{3z}^2 / 2; \quad I_3 = m_3 \rho_3^2.$$

Кинетическая энергия груза 4

$$T_4 = m_4 v_{Kx1}^2 / 2.$$

Выразим  $v_A$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $v_{Cx}$ ,  $\omega_{3z}$ ,  $v_{Kx_1}$  через  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$ :

$$v_{Cx} = \dot{x}. \quad (5)$$

Используя уравнения связей<sup>1</sup>  $v_{Px} = 0$ ,  $v_{Hx} = v_{Cx}$ ,  $v_{Kx_1} = v_{Ex_1}$  и проводя вычисления в соответствии с графами  $C \xrightarrow{2} P$ ,  $O \xrightarrow{3} H$ ,  $O \xrightarrow{3} E$ , получим

$$v_{Cx} - \omega_{2z} r_2 \sin 3\pi/2 = 0; \quad v_{Cx} = -\omega_{2z} R_2 \sin \pi/2;$$

$$v_{Kx_1} = -\omega_{3z} r_3 \sin \pi/2.$$

Отсюда с учетом (5)

$$\omega_{2z} = -\dot{x}/r_2; \quad \omega_{3z} = -\dot{x}/R_2; \quad v_{Kx_1} = \dot{x} r_3 / R_2. \quad (6)$$

Чтобы найти скорость точки  $A$ , запишем выражения для ее декартовых координат:

$$x_A = l \sin \varphi_1; \quad y_A = -l \cos \varphi_1. \quad (7)$$

Здесь  $l$  — переменная длина нити  $AB$ . Продифференцируем (7) по времени:

$$v_{Ax} = \dot{x}_A = \dot{l} \sin \varphi_1 + l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1;$$

$$v_{Ay} = \dot{y}_A = -\dot{l} \cos \varphi_1 + l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1. \quad (8)$$

Выразим  $l$ ,  $\dot{l}$  через  $x$  и  $\dot{x}$ . Из условия нерастяжимости участка нити  $ABD$  следует

$$\dot{l} = v_{Dx}. \quad (9)$$

В соответствии с графом  $P \xrightarrow{2} D$  запишем  $v_{Dx} = -(R_2 - r_2) \omega_{2z} \sin 3\pi/2$ . После подстановки значения  $\omega_{2z}$  из (6)

$$v_{Dx} = -\lambda \dot{x}; \quad \lambda = (R_2 - r_2) / r_2. \quad (10)$$

Из (9), (10) получим

$$\dot{l} = -\lambda \dot{x}. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) от  $t=0$  до произвольного момента времени:

$$l - l_0 = \lambda (x - x(0)).$$

Так как, по условию,  $x(0) = 0$ , то

$$l = l_0 - \lambda x. \quad (12)$$

Подставив (11), (12) в (8), получим

$$v_{Ax} = -\lambda \dot{x} \sin \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1;$$

$$v_{Ay} = \lambda \dot{x} \cos \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.

Отсюда

$$v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 = \lambda^2 \dot{x}^2 + (l_0 - \lambda x)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (14)$$

После подстановки (6), (14) в (4) получим

$$T = \frac{m_x}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1}{2} (l_0 - \lambda x)^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (15)$$

Через  $m_x$  здесь обозначена приведенная к координате  $x$  масса системы

$$\begin{aligned} m_x &= m_1 \lambda^2 + m_2 (1 + \rho_2^2/R_2^2) + m_3 \rho_3^2/R_3^2 + m_4 r_3^2/R_3^2 = \\ &= 103 \cdot 1,37^2 + 63(1 + 0,12^2/0,27^2) + (37 + 107)0,1^2/0,15^2 = 333 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Проведем дифференцирование (15) в соответствии с (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -m_1 (l_0 - \lambda x) \lambda \dot{\varphi}_1^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_x \dot{x}; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m_1 \dot{\varphi}_1 (l_0 - \lambda x)^2; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_x \ddot{x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m_1 \ddot{\varphi}_1 (l_0 - \lambda x)^2 - 2m_1 \lambda \dot{x} (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения обобщенных сил  $Q_{\varphi_1}$ ,  $Q_x$  вычислим сумму мощностей всех активных сил на возможных скоростях и приравняем ее к мощности обобщенных сил:

$$G_{1y} v_{Ay}^B + M_z \omega_{2z}^B + G_{4x} v_{Kx1}^B = Q_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^B + Q_x \dot{x}^B. \quad (17)$$

Возможные скорости  $v_{Ay}^B$ ,  $\omega_{2z}^B$ ,  $v_{Kx1}^B$  удовлетворяют уравнениям (6), (13), так как связи стационарные. Пределах преобразования, приведем (17) к виду

$$\begin{aligned} G_{1y} [\lambda \dot{x}^B \cos \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1^B \sin \varphi_1] - \\ - M_z \dot{x}^B/r_2 + G_{4x} \dot{x}^B r_3/R_3 = Q_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^B + Q_x \dot{x}^B. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_{\varphi_1} = G_{1y} (l_0 - \lambda x) \sin \varphi_1 = -m_1 g (l_0 - \lambda x) \sin \varphi_1; \quad (18)$$

$$Q_x = G_{1y} \lambda \cos \varphi_1 - M_z/r_2 + G_{4x} r_3/R_3. \quad (19)$$

Запишем условия равновесия системы в обобщенных координатах:

$$Q_{\varphi_1} = 0; \quad Q_x = 0. \quad (20)$$

Из (20) и (18); (19) получим, что система находится в равновесии при

$$\varphi_1 = 0; \quad M_z = (G_{4x} r_3/R_3 + G_{1y} \lambda) r_2. \quad (21)$$

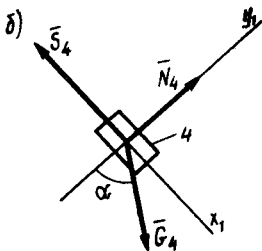


Рис. 86

Для заданных числовых значений параметров  $M_2 = (107 \cdot 0,867 \times \times 0,1/0,15 - 103 \cdot 1,37) 9,81 \cdot 0,114 = -88,7$  Н·м. Выражение обобщенной силы, соответствующее движению системы относительно равновесного положения:

$$Q_x = -G_{1y}\lambda(1 - \cos \varphi_1) = m_1 g \lambda (1 - \cos \varphi_1). \quad (22)$$

```

DATA DT,T,F1,X,OM1,V/ 0.0107,3*0.,0.75,0.0.
DO 12 K=1,241
AB=1.31=1.37*X
E1=(2.74*OM1*V-9.8*SIN(F1))/AB
W=0.424*(9.8*(1-COS(F1))-AB*OM1**2)
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
S4=107*(0.5-W/1.5)
PRINT 30731,T,F1,X,OM1,V,E1,W,S4
30731 FORMAT(10G10.3)
2 F1=F1+OM1*DT
X=X+V*DT
OM1=OM1+E1*DT
V=V+W*DT
12 T=T+DT
STOP
END
0.0 0.0 0.0 0.750 0.0 0.0 -.312 930.
0.107 0.000 -.002 0.719 -.032 -.641 -.274 929.
0.214 0.152 -.006 0.622 -.057 -1.20 -.169 922.
0.321 0.212 -.013 0.472 -.069 -1.62 -.033 912.
0.428 0.254 -.020 0.285 -.066 -1.88 0.087 903.
0.535 0.274 -.027 0.078 -.053 -1.98 0.152 899.
0.642 0.273 -.032 -.133 -.036 -1.94 0.143 899.
0.749 0.248 -.035 -.333 -.024 -1.76 0.064 905.
0.856 0.204 -.038 -.507 -.023 -1.44 -.062 914.
0.963 0.143 -.041 -.640 -.037 -.977 -.194 923.
1.07 0.070 -.046 -.718 -.062 -.413 -.289 930.
1.18 -.008 -.054 -.733 -.095 0.192 -.315 932.
1.28 -.042 -.056 -.684 -.127 0.759 -.263 928.
1.39 -.153 -.080 -.580 -.150 1.22 -.154 920.
1.50 -.208 -.097 -.433 -.161 1.53 -.025 911.
1.60 -.246 -.114 -.259 -.158 1.70 0.084 904.
1.71 -.265 -.131 -.074 -.145 1.74 0.142 899.
1.82 -.264 -.145 0.110 -.130 1.67 0.136 900.
1.93 -.244 -.159 0.281 -.118 1.49 0.072 904.
2.03 -.206 -.171 0.428 -.115 1.21 -.032 912.
2.14 -.155 -.184 0.541 -.124 0.850 -.144 920.
2.25 -.093 -.198 0.612 -.144 0.424 -.233 926.
2.35 -.026 -.215 0.635 -.171 -.027 -.273 929.
2.46 0.041 -.234 0.612 -.200 -.453 -.255 928.
2.57 0.104 -.257 0.545 -.225 -.812 -.187 923.

```

Рис. 87

Подставим (16), (18), (22) в (3) и запишем полученную систему дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z}; \quad \dot{x} = v_{Cx}; \quad \dot{v}_{Cx} = w_{Cx}; \quad (23)$$

$$\varepsilon_{1z} = (2\lambda\omega_{1z}v_{Cx} - g \sin \varphi_1) / (l_0 - \lambda x); \quad (24)$$

$$w_{Cx} = \frac{m_1}{m_x} \lambda [g(1 - \cos \varphi_1) - (l_0 - \lambda x)\omega_{1z}^2]. \quad (25)$$

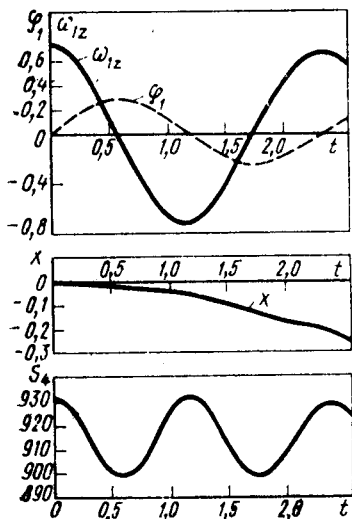


Рис. 88

Эйлера с шагом  $\delta t = 0,0107$  с. Программа счета приведена на рис. 87.

*Обозначение переменных в программе:*

Переменные	.	.	$t$	$\delta t$	$\varphi_1$	$x$	$\omega_{1z}$	$v_{Cx}$	$\varepsilon_{1z}$	$w_{Cx}$	$S_4$	$l$
Обозначения	.	.	T	DT	F1	X	OM1	V	E1	W	S4	AB

Печать результатов с шагом  $\Delta t = 0,107$  с организована при помощи логического оператора IF. Сила  $S_4$  вычисляется на каждом шаге печати результатов. На печать выводятся переменные  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $x$ ,  $\omega_{1z}$ ,  $\varepsilon_{1z}$ ,  $w_{Cx}$ ,  $S_4$ .

Результаты решения (см. рис. 87) представлены графиками на рис. 88.

Для определения натяжения нити AB по графику  $\varphi_1(t)$  найдем момент времени  $t = 1,18$  с, когда нить AB в первый раз проходит вертикальное положение ( $\varphi_1 = 0$ ). Для этого момента времени уравнение движения точечного груза A, освобожденного от связей, в проекции на ось  $y$  будет таким:  $m_1 \dot{v}_{Ay} = S_1 - m_1 g$ .

Продифференцировав по времени (13), получим для этого момента времени  $\dot{v}_{Ay} = w_{Cx} \lambda + (l_0 - \lambda x) \varphi_1^2 = -0,313 \cdot 1,37 + (1,31 +$

Для определения натяжения нити KE освободим груз 4 от связей и обозначим реакции, как показано на рис. 86.

Запишем уравнения изменения количества движения в проекции на ось  $x_1$ :

$$m_4 \dot{v}_{Kx_1} = m_4 g \sin \alpha - S_4.$$

Отсюда после подстановки выражения  $v_{Kx_1}$  из (6) найдем

$$\begin{aligned} S_4 &= m_4 (g \sin \alpha - w_{Cx} r_3 / R_3) = \\ &= 107 (8,5 - w_{Cx} / 1,5). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Уравнения (23)–(25) интегрируются на ЭВМ методом

$+ 1,37 \cdot 0,084) \cdot 0,733^2 = 0,337 \text{ м/с}^2$ . Тогда  $S_1 = m_1(g + \dot{v}_{Ay}) = 103(9,81 + 0,337) = 1040 \text{ Н}$ .

**Контроль решения.** Графики на рис. 88 не имеют разрывов. Из графиков также видно, что движение системы близко к колебательному, оговоренному в условиях задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Б., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I и II. М., 1973.
2. Бетелин В. Б. Мониторная система АСФОР. Командный язык. Командная система: Препринт. — ИПМ АН СССР, 1978, № 49.
3. Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Ч. I и II. М., 1979.
4. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., 1973.
5. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах/А. В. Петров, Б. Е. Алексеев, М. А. Титов и др.; Под ред. А. В. Петрова. М., 1984.
6. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. М., 1981.
7. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. А. Курс теоретической механики. М., 1968.
8. Мак-Кракен Д., Дорм У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., 1977.
9. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 2. Минск, 1973.
10. Методические указания к расчету по курсу «Теоретическая механика»/И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. — М.: МЭИ, 1980—1984 (Динамика твердого тела — 1980; Статика — 1980; Кинематика плоского движения — 1981; Динамика машин — 1983; Динамика — 1984).
11. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Теория и практика применения ЭВМ». Отладка программ с помощью диалоговой системы «Примус»/Н. А. Мотина, Т. К. Рыбакова. — М.: МЭИ, 1981.
12. Мецкерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1981.
13. Применение диалоговых форм при использовании ЭВМ в учебном процессе/В. Б. Бетелин, С. Е. Богомолов, Г. И. Мосалов и др. — М.: Моск. ин-т стали и сплавов, 1982.
14. Сборник научных программ на ФОРТРАНе. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. М., 1974.
15. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/А. А. Яблонский, С. С. Норейко и др. М., 1978.
16. Халфман Р. Динамика. М., 1972.
17. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. I. М., 1984.
18. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. М., 1984.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие . . . . .	3
Принятые обозначения . . . . .	5
<b>Статика</b>	
Определение реакций связей составной конструкции . . . . .	6
Расчет С-1 . . . . .	6
Расчет С-1а . . . . .	14
Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской стержневой конструкции . . . . .	15
Расчет С-2 . . . . .	15
<b>Кинематика</b>	
Кинематика плоского механизма с одной степенью свободы . . . . .	22
Расчет К-1 . . . . .	22
Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы . . . . .	35
Расчет К-2 . . . . .	35
Кинематика управления манипулятором . . . . .	42
Расчет К-3 . . . . .	42
<b>Динамика</b>	
Динамика материальной точки . . . . .	54
Расчет Д-1 . . . . .	54
Относительное движение материальной частицы по лопатке турбомашинны . . . . .	67
Расчет Д-2 . . . . .	67
Динамика манипулятора . . . . .	76
Расчет Д-3 . . . . .	76
Динамика машины с шатуно-кривошипным приводом . . . . .	88
Расчет Д-4 . . . . .	88
Расчет Д-4а . . . . .	101
Динамика машины с кулисным приводом . . . . .	101
Расчет Д-5 . . . . .	101
Расчет Д-5а . . . . .	110
Расчет Д-5б . . . . .	110
Динамические реакции в подшипниках ротора . . . . .	111
Расчет Д-6 . . . . .	111
Движение системы с двумя степенями свободы относительно положения равновесия . . . . .	121
Расчет Д-7 . . . . .	121
Список литературы . . . . .	135